

## 電子光学入門

— 電子分光装置の理解のために —

(第9回)

嘉藤 誠

日本電子(株) 〒196 8558 東京都昭島市武蔵野 3 1 2

kato@jeol.co.jp

(2007年3月20日受理)

電子分光においてもちいられるエネルギーアナライザの動作原理と特性に関して、電子光学的な観点から議論します。アナライザはエネルギー分散作用だけではなく、電子レンズとしての集束作用をあわせもつ必要があります。これら二つの作用はアナライザの動作を特徴づけるものであり、エネルギー分解能と感度を決定する要因となります。

### Introduction to Electron Optics for the Study of Energy Analyzing Systems (9)

M. Kato

JEOL Ltd., 3 1 2 Musashino, Akishima, Tokyo 196 8558.

kato@jeol.co.jp

(Received: March 20, 2007)

The basic characteristics and the design principles of energy analyzers commonly used in electron spectroscopy are discussed, mainly from an electron optical point of view. Combined effect of energy dispersion and convergent lens action is the essence of the operation of energy analysers; these are the main factors which contribute to the resolution and sensitivity of spectrometers.

## 9 エネルギーアナライザの動作

### 9.1 はじめに

前回まで電子レンズとその収差の話をしてきましたが、今回から電子分光系へとテーマを移します。

電子分光系の主役は、エネルギーアナライザです。アナライザのはたらきは、入射した電子ビームの運動エネルギーによってビームを振り分けて、特定のエネルギーをもつ電子だけを通過させることです。

電子のエネルギースペクトルを得るには、アナライザによって選ばれるエネルギー値を掃引して、アナライザの出口に置いた検出器の出力をプロットしま

す。あるいは、アナライザの分散面に生じたビームパターンを画像として取り込むことで、スペクトルを同時検出することも行われます。

また、結像レンズ系の途中にアナライザを挿入すれば、特定のエネルギーだけを選別した像を得ることができます。たとえば、試料にX線を照射し、試料から放出される光電子のうちで特定のエネルギーをもつものだけで結像させれば、試料面の元素分布や結合状態の違いが画像として得られます。

アナライザに入射してくる電子ビームは、一本の線のように絞られた状態ではなく、一般に空間的にひろがりをもちます。しかし、アナライザはエネルギーの差だけを検出し、それ以外の入射条件の違いにたいしては鈍感でなければなりません。すなわち、ひろがったビームをエネルギーごとに別々の位置に集束さ

せるような、レンズとしての動作が同時に要求されることとなります。

たとえアナライザがレンズ作用をもたなくても、入射ビームをあらかじめ細く絞れば問題はないように思えます。しかし、ビームを絞る操作は必ず強度低下を伴います。前回述べたように、電子ビームの輝度は一定の法則に従い、たとえばビーム幅を縮小すれば、その分だけ角度分布がひろがってしまいます。そこで、レンズとしての集束作用の優劣は、そのままアナライザとしての性能を左右するものです。

エネルギーを振り分ける機能に、レンズとしての集束作用が付加されたときに、なにが起きるでしょうか？これがアナライザの動作を理解するためのポイントとなります。電子分光系は電子顕微鏡のレンズ系とは異なった言葉で語られがちですが、結像レンズに関する概念は、そのまま分光系にも適用されるべきものです。

本稿では、今回以降において、電子分光系の動作原理を中心に解説を行います。電子分光でもちいられるアナライザの実用面での比較は、本誌連載中の後藤先生の解説において述べられていますので、そちらと相補的に読んでいただければ幸いです。

なお、今回紹介するアナライザは、多くの場合略称で記しますので、先の一覧を挙げておきます。

- PMA : Plane Mirror Analyzer
- CMA : Cylindrical Mirror Analyzer
- MDA : Magnetic Deflection Analyzer
- CHA : Concentric Hemispherical Analyzer
- WF : Wien Filter

## 9.2 アナライザの基本的な動作

実用的なエネルギーアナライザをタイプ別に議論するまえに、一般にアナライザの基本的なはたらきに関して述べておきます。本節で説明の足りない部分は、§ 9.3 以降で補われます。

### 9.2.1 エネルギースペクトル

簡単な構成のアナライザとして、Fig.1(a) に示されるものを考えましょう。これは、二枚の平板電極に正負の電位  $\pm V$  を与えて偏向電場をつくり、そこに電子ビームを入射させるものです。偏向電極のまわりをアース電極で囲っていますが、これは電場のひろがり

を防ぐためであり、以下の議論にとって本質的ではありません。

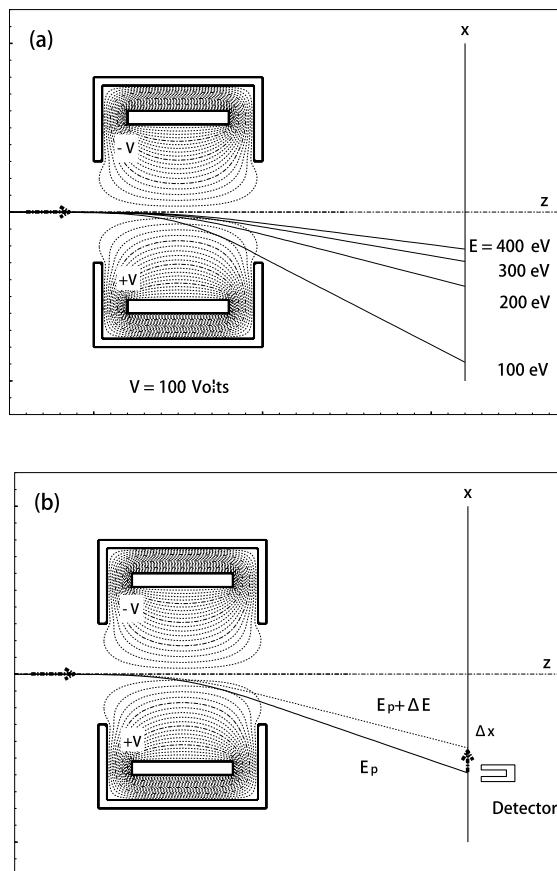


Fig. 1: (a) Simple example of an energy analyzer consisting of two deflecting electrodes. (b) Energy dispersion for the electron trajectories passing near the detector.

入射ビームにいろいろな運動エネルギーの電子が含まれるとすれば、エネルギーが大きいものほど電場で曲げられにくいので、エネルギーごとにビームが振り分けられます。もし図の  $x$  軸にそって写真乾板のようなものをおけば、そこには電子のエネルギースペクトルが写るでしょう。

このように、電子のエネルギーごとにビームが振り分けられる現象をエネルギー分散 (Energy Dispersion) とよびます。これは、太陽光をスリットで細く絞ってプリズムに通すと、波長ごとに振り分けられて、虹のパターンをつくるのに対応した現象です。図の  $x$  軸にそって形成されるスペクトルの像は、分散像とばれます。

一般に、アナライザによって電子ビームのエネルギースペクトルを得るには、いくつか方法があります。上で述べたように、分散像をそのまま記録する方

法がそのひとつです。分散像の位置に蛍光板などを置くことで、速い変化をリアルタイムで追うことも可能です。

ただし、Fig.1(a)の場合がそうであるように、分散像が示すスペクトルはエネルギーに関して線形に並ばないのがふつうです。すなわち、ビームに含まれるエネルギーが等間隔のとびとびの値であった場合、分散像が示すスペクトルは一般には等間隔にはなりません。またこの方法では、エネルギー対電流値のグラフとしてのスペクトルを得ることができません。観測される像強度と電流値の対応が一般にはわからないからです。

電流量に比例する正しいスペクトルを得るためには、分散面のどこかに小さな検出器を置いたうえで、場の強度を時間的に変化させる、すなわち掃引していきます。すると、検出器に入ることでできる電子のエネルギー値が時間とともに変化していくので、そのときの検出器の測定電流をプロットすれば、それがエネルギースペクトルを与えます。

適当な位置に検出器を置いて、場の強度を掃引することでスペクトルを得る場合の状況を Fig.1(b) に示します。どんなエネルギーの電子が検出器に入るかは、電極にかかる電圧  $V$  だけです。この値を定めたときの、検出器に入ることでできる電子のエネルギーを**パスエネルギー** (Pass Energy) とよび、以下ではこれを  $E_p$  と書きます。  $V$  を変化させることで  $E_p$  を制御して、希望するエネルギー領域でのスペクトルを得るわけです。

たとえ分散像がエネルギーに関して線形に並ばなくても、場を掃引する方法では問題が生じません。なぜなら、 $E_p$  は電極電圧  $V$  に比例するので、 $V$  を線形に掃引すれば、エネルギーに関して線形なスペクトルが得られるからです。

本章においては、基本的には検出器を固定して場を掃引する立場で議論します。ただし、掃引の際には分散像が検出器の位置を通り過ぎて行くことになるので、分散像の性質を議論するほうがわかりやすい場合がしばしばあります。

## 9.2.2 エネルギー分散係数

エネルギーアナライザの性能を決める要素の一つとして、エネルギー分散の大きさがあります。これは、入射エネルギーが  $E_p$  から  $\Delta E$  だけ変動したとき、ビームが検出器位置からどれだけ振られるかを示すものです。

一般に、アナライザのエネルギー分散は次のかたちで示されます。

$$\Delta x = C_E \frac{\Delta E}{E_p} \quad (1)$$

ここで  $x$  は、アナライザの分散方向にとった座標とします。

上式の右辺の  $C_E$  が、**エネルギー分散係数** (Energy Dispersion Coefficient) とよばれ、アナライザの性能を特徴づける重要な量です。この  $C_E$  が大きいほど、ある一定のエネルギー差  $\Delta E$  にたいしての分散像の分離  $\Delta x$  が大きくなり、よってアナライザとして優れています。

さて、エネルギー分散の大きさは、エネルギー差  $\Delta E$  が、検出面においてどれくらいの距離の差として現れるかということです。その意味では、(1)の右辺に  $E_p$  が含まれているのは、なにか余分に思えます。

これには、電場中の電子軌道の性質が関係しています。一般に電場中の電子軌道に関して、次のことがいえます。電子のエネルギーが、たとえば2倍になったとします。このとき、空間の各点における電場強度をいっせいに2倍にすれば、電子軌道はもとの形状に保たれます。これはすなわち、 $E_p$  が  $V$  に比例するということであり、この事実はすでに前節でもちいしました。

そこで、Fig.1(b)の二本の軌道に対応するエネルギーが、たとえば  $E_p = 100$  eV と  $E_p + \Delta E = 110$  eV であったとしましょう。  $V$  が2倍になれば、二本の軌道に対応するエネルギー値は  $E_p = 200$  eV と  $E_p + \Delta E = 220$  eV となります。すなわち、軌道に対応するエネルギー値とエネルギー差が、ともに2倍になります。結局、分散  $\Delta x$  を与えるような  $\Delta E/E_p$  は、 $V$  とは無関係に一定に保たれます。

これから結論されることは、今考えているアナライザに関して、エネルギー分散  $\Delta x$  と  $\Delta E/E_p$  を定数で結びつけることができるということです。これを表したものが(1)に他なりません。

比例定数  $C_E$  は一般に、装置の幾何学的な配置だけで決まるような、長さの次元をもった量となります。より具体的にいえば、 $C_E$  は場の分布と軌道のひろがりの特徴づける長さ、あるいはその定数倍となります。もしアナライザのサイズを相似形で2倍に拡大すれば、 $C_E$  も2倍になります。ただし  $C_E$  の値自身は、軌道計算から決定するしかありません。

なお、ここでは検出器の位置を固定して考えていますが、 $C_E$  は検出器の位置によって変化します。  $C_E$

がアナライザで決まる定数であるというのは、検出器位置まで指定したときのなしです。

また、分散像を観察する立場で考えると、 $C_E$ は分散像を見る場所ごとに変わることになります。Fig.1の場合では、図の下方ほど $C_E$ が大きくなります。しかし、 $C_E$ の大きな場所ほどアナライザとして有利になるかといえば、そうとは限りません。この問題を扱うにはエネルギー分解能の概念が必要であり、これは次節以降で考えていきます。

以上は電場に関して述べましたが、電子を偏向させるものが磁場であっても構いません。その際は、エネルギーが2倍になったときに、空間の各点の磁場強度を $\sqrt{2}$ 倍にすれば軌道が不変に保たれます。したがって、分散 $\Delta x$ を与えるような $\Delta E/E_p$ は磁場強度にはよらなくなり、分散が(1)のかたちで表せることには変わりありません。

分散 $\Delta x$ が $\Delta E/E_p$ に比例するという事は、同じ $\Delta E$ に対応する $\Delta x$ は、 $E_p$ の増加とともに減少してしまうことです。分散を決める量が $\Delta E$ 自身ではなく、パスエネルギーとの相対値 $\Delta E/E_p$ であるという事実は、アナライザの動作を理解するうえで重要な意味をもってきます。本章を通じて見るように、これはアナライザの特性を直接に支配するものです。

本節の最後として、相対論補正に関して述べておきます。上の議論においては、 $V$ と $E_p$ が比例するという事を前提としていました。しかし相対論の効果を考慮すると、これは厳密には成り立たなくなります。

相対論補正に関してはすでに第2章で述べましたが、電場による偏向にたいしては、非相対論的な結果よりも電子軌道が曲げられやすくなる方向に補正されます。この効果によって、 $V$ を2倍にしても $E_p$ は2倍にはならず、それよりもエネルギーの大きな電子が検出器に入ります。

電場中では、電子の加減速に対応して、補正因子が場所の関数となるので、その積分を計算しないと補正効果を正しく評価できません。われわれが直接に制御できるのは電圧 $V$ だけであり、 $V$ に対応する $E_p$ をあらかじめ計算か実験で決定しておく必要があります。(相対論効果によって $C_E$ は定数ではなくなり、 $E_p$ に依存するようになります。しかし量的な違いはわずかなので、通常は考慮する必要はありません。)

磁場中の電子軌道に関しては、電場とは逆に、相対論補正は曲げられにくい方向にはたります。磁場中では電子のエネルギーの変化はなく、加速電圧 $\Phi$ をその相対論補正 $\hat{\Phi}$ でおきかえるだけで済むので、電場よりも計算が楽です。第2章で述べたように、補正

量は $\Phi=1000$  Vのときに約1 eVの大きさとなり、電子分光において無視できない大きさとなります。

電場をもちいたアナライザの場合も、補正量としては磁場型と同程度と考えてかまいません。すなわち、アナライザ内でのエネルギー $e\Phi(\mathbf{r})$ が平均して1000 eVの程度であれば、測定値としてのエネルギーの補正は約1 eVとなります。

### 9.2.3 レンズ作用

ここまでは入射ビームは細く絞られていると考えていましたが、それでは感度が限りなく0になってしまいます。実際には、ビームに角度幅をもたせなければなりません。

Fig.1の系は、入射ビームが角度幅をもつときに集束作用がはたらかないので、アナライザとしての性能はよくありません。実際、ある角度幅をもったビームを入射させてみるとFig.2のようになります。これはビームが二つのエネルギーの電子を含む場合に、分散像が分離せずに重なってしまう状況です。ビームがボケることで、分散像として得られるはずのスペクトルがこわされてしまいます。

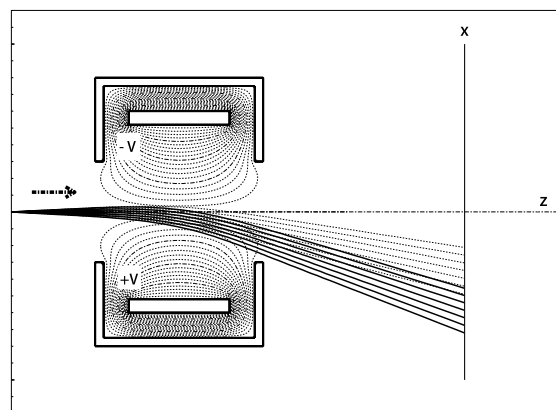


Fig. 2: Deflection of an electron beam having finite width of incident angle.

理想的なアナライザとは、このような角度に依存するボケなしに、ビームのエネルギーごとに別々の点に集束させるようなものです。すなわち、エネルギー分散作用とレンズとしての集束作用をあわせもつものです。

図のアナライザに集束作用をもたせるために、静電レンズの場を重畳させるという方法があります。すなわち、図の $z$ 軸を光軸とするような静電レンズ場

を重ねます。(通常の静電レンズの内部に、偏向電場を重畳させるための電極を追加すると考えても同じです。)

しかしながら、そのようなアナライザはあまりうまくはたきません。静電レンズとしてもっとも素性のよい集束作用が得られるのは、光軸である  $z$  軸付近です。しかし、偏向場の存在のもとで、光軸を通るような電子はエネルギーが無限大のものだけです。そのようなビームは、(1) によって分散が 0 になってしまいます。

アナライザとしてはたきには、分散作用によって振られた、曲がった軌道によって実現されます。しかしそのような軌道は、軸対称レンズにとっては軸外軌道であり、一般に大きな収差をとまいません。結局、分散作用と軸対称なレンズ作用をたんに重ね合わせるだけでは、アナライザとしてよいものはできません。

そこで、分散をうけた軌道に沿って、レンズ作用が理想的にはたらくという状況が必要であるわけです。アナライザとして実用になっているもののほとんどは、曲がった光軸を有するものです。曲線にそったレンズ作用というものがどのようにして生じるのか、これを理解することが重要となります。

では次節から、実用的なアナライザを個別に見ていくことにしましょう。

### 9.3 平面鏡型アナライザ

ある一定方向の偏向作用にもとづくアナライザは、一般に反射鏡型とよばれます。このうち一様電場をもちいたものが、**平面鏡型アナライザ** (Plane Mirror Analyzer: PMA) です。

前節で見たように、電子を単に電場で偏向させるだけではレンズ作用が生じません。しかし、偏向場へ入射させるビームの方向をうまく設定すれば、そのような作用を得ることが可能となります。

PMA は、分散作用とレンズ作用をそなえた、もっとも構成の簡単なアナライザです。一様電場中の電子軌道の解析は容易であり、PMA の解析によってアナライザがもつ特性のすべてが出そろいます。そこで、PMA の動作を調べながら、その過程で電子分光系というものはたきを詳しく考えていくことにします。

なお、PMA の現実の応用が目的ではないので、電場を形成する方法、あるいはフリンジ場の処置などに関しては議論しません。

#### 9.3.1 一様電場の作用

一様電場中の電子軌道は、地球上で石を投げたときの石の軌道を思い浮かべればよいので、容易に理解できます。

電場中の一点に、電子ビームが入射するとします。ビームの方向は一定として、いろいろな運動エネルギーをもった電子が含まれるとすれば、入射後の軌道は Fig.3 のようになります。電場方向に  $x$  軸をとり、 $zx$  平面上の軌道を考えています。 $z$  軸からはかったビームの入射角を  $\theta_0$  とします。

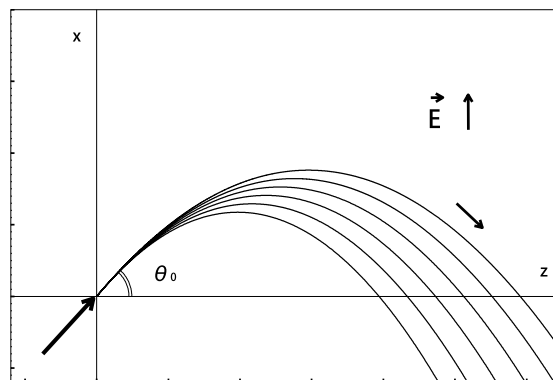


Fig. 3: Formation of an energy dispersion image in a uniform electric field.

一様電場中では、電子の運動エネルギー  $E$  に比例して、相似形で軌道が変化していきます。 $E$  が 2 倍になれば、軌道は相似形のまま 2 倍に拡大されます。もし  $E$  が等間隔でとびとびの値であったとすれば、 $z$  軸上の到達点は等間隔にならび、エネルギーに関して線形な分散像がつくられます。図ではそのような場合を描いています。

PMA における軌道が  $E$  にたいして相似形で変わることは、自明ではありません。仮に、エネルギーではなく速度の大きさに比例して軌道の形が変化するといわれても、すぐにおかしいとは感じないでしょう。実際、磁場中の電子軌道に関してはそのような状況があります。

一様電場中の軌道とエネルギーの相似性は、位置エネルギーを考慮すれば理解できます。運動の  $x$  方向成分だけを考えると、電子が一番高く上がって  $x$  方向に静止する点では、最初もっていた運動エネルギーがすべて位置エネルギーに変換されます。位置エネルギーは  $x$  座標に比例するので、最初の運動エネルギーが 2 倍になれば、最大到達点の  $x$  座標も 2 倍に

なります。したがって、エネルギーが軌道のスケールを決めていることがわかります。

この軌道の相似性は、一様電場が位置依存性をもたないことからの帰結であり、電場をもちいたアナライザのすべてに共通するわけではありません。分散像の線形性は、PMAの最大のメリットです。

### 9.3.2 エネルギー分散係数

PMAにおいて、検出器を固定して、電場強度を掃引してスペクトルをとるときに状況を Fig.4 に示します。図のように、入射点から検出器までの距離を  $L$  として、分散の大きさを  $\Delta L$  で与えます。

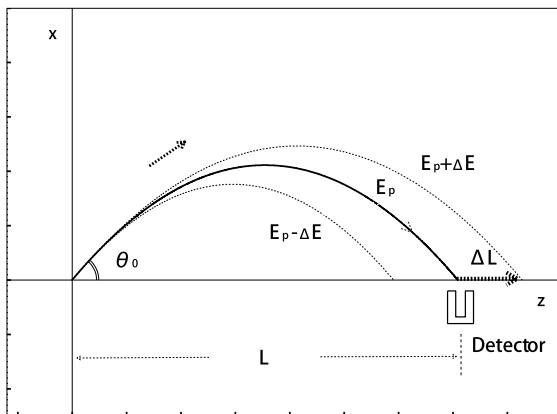


Fig. 4: Dispersion trajectories passing near the detector.

一般に、アナライザのエネルギー分散係数  $C_E$  は (1) で定義されました。PMAの  $C_E$  は、軌道の表式をもちいずとも、軌道の相似性だけから次のように導くことができます。

軌道の相似性によって、入射エネルギー  $E$  が2倍になれば軌道の形も2倍に拡大されます。これは、 $E$  と  $L$  が比例関係にあるということです。そこで、 $E = E_p \rightarrow E_p + \Delta E$  という変化にたいして、 $L \rightarrow L + \Delta L$  と変わったとすれば、

$$\frac{\Delta L}{L} = \frac{\Delta E}{E_p} \quad (2)$$

の関係が成り立ち、よって、

$$\Delta L = L \frac{\Delta E}{E_p} \quad (3)$$

が得られます。これがPMAのエネルギー分散を与える式です。PMAのエネルギー分散係数は、

$$C_E = L \quad (4)$$

であるわけです。

一般に  $C_E$  は長さの次元をもち、アナライザとしてのサイズを特徴づける大きさになるのです。PMAでは電場は一様にひろがっているので、電場分布を特徴づける量として、長さの次元をもった特別な量がでてくることはありません。そのような量があるとすれば、電子軌道の形状を特徴づけるような長さであるはずですが、ここでは、 $L$  という量とその役をはたしています。 $L$  は検出器の位置を示しますが、同時にアナライザのサイズを代表する量となっているわけです。

検出器を置かずに分散像を観察する立場では、 $L$  は入射点から測った分散像の位置を指定する座標と考えることができます。(4) が示すように、分散像を観察する位置  $L$  ごとに  $C_E$  が異なるわけです。

### 9.3.3 開口収差

よく知られているように、決まった速度で石を投げるとき、地表から  $45^\circ$  の傾斜角で投げたときが一番遠くに石が到達します。すなわち、石を投げる角度を徐々に大きくしていったときに、 $45^\circ$  のときに到達距離が最大となり、その角度を超えると、ふたたび到達距離が減少していきます。

われわれにとって重要なのは、角度  $45^\circ$  のときに到達距離が停留となるということです。停留であるということは、角度が  $45^\circ$  を中心としてある程度幅があっても、到達距離には変化がないことです。これは、 $45^\circ$  で出た軌道を中心とした集束作用が存在することを意味します。

この様子を計算で見てみましょう。Fig.5は、エネルギーは一定として、一様電場中にいろいろな角度で入射した電子軌道の様子です。図からわかるように、 $\theta_0 = 45^\circ$  で軌道が折り返し、そこで到達距離が停留になります。そこで、入射角の代表値を  $\theta_0 = 45^\circ$  として、これを中心としてある程度の角度幅に制限すれば、ビームのボケは効果的に抑えられるはずですが、

入射角  $\theta_0 = 45^\circ$  の軌道は、中心軌道 (Central Trajectory) とよばれます。入射角は、この中心軌道からはかった  $\alpha_0$  によって表すのが便利です。すなわち、

$$\theta_0 = \frac{\pi}{4} + \alpha_0 \quad (5)$$

とおきます。

中心軌道は、通常の電子レンズにおける光軸としての役割をはたすものです。軌道の到着点は  $\alpha_0$  に関して1次の変化がなく、これは通常のレンズ系にお

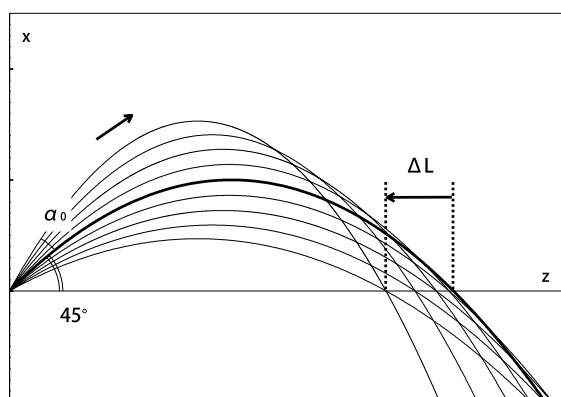


Fig. 5: Blurring of an incident beam caused by the second order aperture aberration.

るガウス像点をもつ性質です。すなわち、この中心軌道のまわりにレンズ作用が存在するという事です。

分散面における中心軌道からの軌道のずれ  $\Delta L$  は、収差とよぶべきものです。1次のフォーカスは達成されているので、到着点のずれは  $\alpha_0$  に関して2次か、それ以上の項からはじまります。

通常の軸対称レンズであれば、光軸上の光源にたいしての収差は球面収差とよばれ、これは角度に関して3次からはじまる奇数次の収差です。角度に関して奇数次であれば、角度の符号に応じて収差の符号が変わります。たとえば、角度が正のときは収差が負、角度が負のときは収差が正という具合です。これは、光軸まわりに系が回転対称であることの反映です。

ところが Fig.5 の場合は、 $\alpha_0$  が正でも負でも、絶対値が同じなら同じ点におちます。これは、収差量  $\Delta L$  が  $\alpha_0$  に関して偶数次であることを意味しています。このような収差をもつことは、中心軌道に沿って場の分布を見わたしたときに、回転対称性が失われていることを意味します。

この事情は、軸対称レンズの軸外物点にたいしての収差と同様です。軸対称レンズ場の分布を軸外軌道にそってながめれば、それは軸対称とはなりません。これによって角度に関して2次の収差、すなわちコマ収差が現れます。(くわしくは第5章を参照してください。)

アナライザは一般に、中心軌道にそって上記のような性質の収差をもち、これを開口収差 (Aperture Aberration) といいます。PMA の開口収差の最低次は2次であり、次の形に書かれます。

$$\Delta L = C_A \alpha_0^2 \quad (6)$$

この  $C_A$  は開口収差係数とよべれます。PMA の  $C_A$  はのちに導きますが、結果を先に記せば、

$$C_A = -2L \quad (7)$$

となります。右辺の負号は、 $\alpha_0$  の絶対値が大きいほど  $L$  の小さい側におちることを意味します。

(6) の  $C_A$  は、正しくは「2次の開口収差係数」ですが、ふつう開口収差といえば2次のものを指します。球面収差といえば通常3次のものを指すのと同様です。アナライザによっては、2次の開口収差が存在しない場合があり、そのような場合だけ高次の開口収差が問題になります。

なお、アナライザのレンズ作用に関して、開口収差が2次からはじまる系を「1次集束」とよぶことがあります。これは、1次のフォーカスが達成されていて、収差は2次以上であるという意味合いです。もし開口収差が3次からはじまるのであれば、「2次集束」とよべます。

開口収差は、検出面でエネルギーを分離しようとするアナライザの作用を阻害するものであり、アナライザとしての性能を制限する要因の一つです。もちろん、 $C_A$  が小さいほど優れたアナライザです。

(6) の定義によって、 $C_A$  は一般に長さの次元をもちます。したがって、分散係数  $C_E$  のときと同様に、 $C_A$  はアナライザとしてのサイズに比例する量となります。PMA に関しての結果  $C_A = -2L$  は、確かにそのような量になっています。

§9.3.2 で述べたように、分散像を観察する立場では、 $L$  は分散像を見る位置を指定する量となります。 $C_A$  の絶対値が  $L$  に比例するという事は、入射点からの距離に比例して分散像のボケが大きくなるということです。これは、軌道の  $E$  に関しての相似性を考えれば当然のことです。

アナライザを大きくつくれば、 $C_E$  が大きくなる一方で、 $C_A$  も同時に大きくなって収差によるボケが増大します。したがって、アナライザのサイズの影響はそれほど単純にはいえません。この問題は次節で議論します。

### 9.3.4 エネルギー分解能

エネルギー分解能を決める要因は多く存在しますが、詳しくは次回以降のテーマとなります。ここでは簡略化して、分散像が重ならず分離するような最小のエネルギー差  $\Delta E$  として、分解能を定義するこ

とにします。分解能の本質を議論するためには、この定義で十分です。

エネルギー差  $\Delta E$  に対応する分散像の分離の距離は  $C_E$  に比例し、そして分散像は  $C_A$  に比例するボケをこうむります。そこで、エネルギー分解能は  $C_E$  と  $C_A$  の大きさのかねあいで決定されるはずで

まず具体例を考察します。PMAにおいて、入射ビームの角度幅を考慮したときの分散像の様子を Fig.6 に示します。入射角は  $45^\circ$  を中心として  $|\alpha_0| \leq \alpha_{0m}$  とし、以下ではしばらく、角度幅  $\alpha_{0m}$  を固定して考え

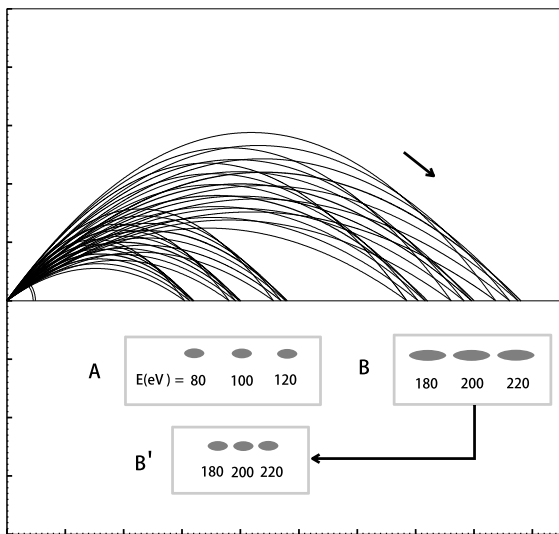


Fig. 6: Energy resolution of PMA is deteriorated with increasing electron energy  $E$ .

図を見ると、電子のエネルギー  $E$  が大きいほど、分散像の開口収差によるボケが増加しています。これは式でいうなら、(6)における  $C_A$  が  $L$  に比例するからです。そこで、分散像からエネルギースペクトルを得る立場では、エネルギーを分離する能力が  $E$  とともに劣化することになります。

図では例として、 $E = 100$  eV の近くの分散像 A と、 $200$  eV の近くの分散像 B の様子を示しています。エネルギー差  $\Delta E = 20$  eV が A では分解できていますが、B ではぎりぎりの状態です。すなわち、分散像 A、B における分解能  $\Delta E$  は同一ではなく、B のほうが 2 倍悪くなっています。

では、検出器を固定して場を掃引する方法ではどうでしょうか。検出器を図の A の付近に固定して場を掃引する場合を考えると、分散像 B は、電場強度が 2 倍になったときに、検出器の位置まで引き寄せ

られます。軌道は相似形ですべて  $1/2$  に縮んで、開口収差によるボケが半分になります。

ところが、電場強度を 2 倍にすればすべての軌道が  $1/2$  に縮むのですから、エネルギー分散の大きさも半分になってしまいます。つまり、開口収差によるボケが半分になると同時に、スペクトルのとなりどうしの間隔も半分になります。この状態を図の分散像  $B'$  で示しています。B が  $B'$  になっても、分解能  $\Delta E$  は変わっていません。結局、分離できるエネルギー差が  $E$  に比例して劣化するという事実は、場を掃引する方法でも避けることはできないわけです。

一般に、アナライザによって分離可能な最小のエネルギー差  $\Delta E$  が、絶対分解能として定義されます。あるいは、相対値  $\Delta E/E$  を分解能としてもちいる場合もあります。これは相対分解能とばれます。この言葉づかいでいえば、絶対分解能  $\Delta E$  は、測定されるエネルギー  $E$  に比例して悪くなるわけです。そして、 $\Delta E$  と  $E$  が比例するということから、相対分解能  $\Delta E/E$  は  $E$  によらず一定に保たれます。

では具体的に、アナライザの分解能が  $C_E$  と  $C_A$  をもちいてどのように表されるかを考えてみましょう。まず、分散による  $L$  のずれを  $\Delta L_E$ 、開口収差によるずれを  $\Delta L_A$  として、区別して記します。(一般のアナライザにたいしても、PMA と同じ  $L$  という記号を分散方向の座標を表すものとしてもちいます。) これらは次のように与えられます。

$$\begin{cases} \Delta L_E = C_E \frac{\Delta E}{E_p} \\ \Delta L_A = C_A \alpha_{0m}^2 \end{cases} \quad (8)$$

(8) の第 1 式は、エネルギー差  $\Delta E$  を、検出面における位置の差に換算するための式と見ることができます。よってこの式をもちいれば、第 2 式で与えられるボケの幅  $\Delta L_A$  を、エネルギー差  $\Delta E$  に換算することができます。このエネルギー差をもつような二つのビームが入射したとすれば、これらがつくる分散像のパターンは、ぎりぎり接した状態となるでしょう。したがって、その  $\Delta E$  がエネルギー分解能を与えることがわかります。

実際にやってみます。第 2 式の  $\Delta L_A$  を第 1 式の  $\Delta L_E$  として代入すれば、次式が得られます。

$$\frac{\Delta E}{E_p} = \frac{C_A}{C_E} \alpha_{0m}^2 \quad (9)$$

これが、アナライザの相対分解能を一般に与える表式です。



上式において、 $C_E$  と  $C_A$  は、アナライザのスケールに比例する量でした。すなわち、アナライザのサイズを2倍にすればともに2倍になり、両者の比率は一定に保たれます。したがって、この比の値はアナライザの種類だけで決まってしまう。よって、アナライザの種類の優劣を比較するために、この比率  $C_A/C_E$  をもちいることができます。

PMA の場合は  $C_E = L$ ,  $C_A = -2L$  でしたから、上式は、

$$\frac{\Delta E}{E_p} = 2 \alpha_{0m}^2 \quad (10)$$

となります。(  $C_A/C_E$  につく負号は意味がないので無視します。 ) たとえば  $\alpha_{0m} = 0.1 \text{ rad} \simeq 6^\circ$  とすれば、上式から  $\Delta E/E_p = 0.02 = 2\%$  となります。

ここで得られた結果 (9) は、分解能と感度の関係を与えているという点で重要です。すなわち、 $\alpha_{0m}$  を大きくとればとるほど感度は向上しますが、分解能は  $\alpha_{0m}$  の自乗で劣化します。「分解能をよくすれば感度が犠牲になる」という関係の、具体的な表式が得られたわけです。

もし  $\alpha_{0m}$  をどんどん小さくしていけば、エネルギー分解能の値だけならいくらでも小さくできます。アナライザの性能をいうとき、分解能の値だけでは、なにもいったことにはなりません。アナライザの性能とは分解能と感度の関係のことであり、その関係を決めるものが  $C_A/C_E$  であるわけです。

すでに述べたように、 $C_A/C_E$  という量においては、アナライザのサイズの影響が打ち消しあって、分解能の表式に効いてきません。これは言葉でいえば、アナライザを2倍大きくすれば、分散が2倍になる一方で、収差のボケも2倍になるので、結局は差が生じないということです。分散像に関していえば、分散像のどの位置でも  $C_A/C_E$  は同一であり、よって相対分解能も同じです。

しかしながら、これは「アナライザは大きいほど有利である」という世間の常識とは異なっています。このような非常識な結果になった理由は、光源の大きさが考慮されていないからです。上の考察においては、ビーム強度を決める量として角度しか考慮していません。角度という量は次元をもたないので、長さの次元をもつアナライザのスケールは感度に寄与しなくなるのです。

すなわち、ここで述べたのは点光源にたいしての分解能と感度の関係であり、一般には修正がなされなければなりません。本章の以下の議論はすべて点光源にたいしてのものであり、光源の大きさの影響は次

回以降で議論します。

### 9.3.5 電子軌道の解析

電場中の荷電粒子の軌道は、第2章で示したように、その粒子の質量と電荷には依存せずに、加速ポテンシャルだけで決まってしまう。そこで、一様電場中の電子軌道にたいしてもそのような表式が導けるはずだ。

具体的に電子軌道の表式を導くまえに、一般にアナライザを解析する際に便利なように、電子のエネルギーの表し方についての約束をしておきます。

まず、電子の運動エネルギー  $E$  は、加速電圧  $\Phi$  によって得たエネルギーとして  $E = e\Phi$  と書けます。すなわち、

$$E = \frac{1}{2}mv^2 = e\Phi \quad (11)$$

です。ここで、 $m$  は電子の質量、 $e (> 0)$  は電子の電荷の絶対値です。

実際に分析される電子は、静止の状態から電位差  $\Phi$  で加速されたものとは限らないわけですが、運動エネルギーを加速電圧に換算して考えて、それを  $\Phi$  と表します。電場中では、 $\Phi$  は加速ポテンシャル  $\Phi(x, y, z)$  として場所の関数となります。しかし、ここではアナライザに入射する際のエネルギーを表示するのが目的なので、 $\Phi$  はつねに定数として考えます。

一般に、アナライザはエネルギーの違いを分析するものとして扱われます。その意味では、なるべく  $\Phi$  ではなく  $E$  をもちいるべきです。しかし、電場中の荷電粒子の運動の道すじ、すなわち時間を消去したあとの軌道は、加速ポテンシャルだけで決まり、その粒子の電荷と質量に依存しません。そこで、なるべくエネルギー  $E = e\Phi$  から電荷  $e$  をくくり出して、 $\Phi$  だけで定式化したいわけです。解析の過程では、なるべく  $\Phi$  をもちいてエネルギーを表すべきです。

では、上の点に留意しながら、PMA における電子軌道の表式を導いてみましょう。Fig.4 の状況にもどり、 $x$  方向の電場強度を  $\mathcal{E}$  とすれば、この方向の電子の運動方程式は  $m\ddot{x} = -e\mathcal{E}$  となります。加速度の絶対値は定数  $a = e\mathcal{E}/m$  となり、この  $a$  は石の運動を考える際の重力加速度に相当します。

一方、 $z$  方向にはドリフト運動となるので、初期条件として速度ベクトル  $\mathbf{v}_0 = (\dot{z}(0), \dot{x}(0)) = (v_{z0}, v_{x0})$  を与えたときの運動は次のようになります。

$$\begin{cases} z(t) = v_{z0}t \\ x(t) = v_{x0}t - \frac{a}{2}t^2 \end{cases} \quad (12)$$

ここで、 $v_0$  の大きさを  $v_0$  とすれば  $v_{z0} = v_0 \cos \theta_0$ ,  $v_{x0} = v_0 \sin \theta_0$  です. 上式から  $t$  を消去すれば, 軌道  $x = x(z)$  が次のように導かれます.

$$x = \frac{z}{v_0 \cos \theta_0} \left( v_0 \sin \theta_0 - \frac{a}{2} \frac{z}{v_0 \cos \theta_0} \right) \quad (13)$$

ここで, 電子が折り返してふたたび  $z$  軸と交わる点の座標  $L$  は, (13) をもちいて次のように求められます.

$$L = \frac{v_0^2}{a} \sin 2\theta_0 \quad (14)$$

さて, 上式においては,  $v_0$  が電子のエネルギーを指定する量としてはたらいっていますが, これは加速電圧  $\Phi$  をもちいて  $v_0 = \sqrt{2e\Phi/m}$  と書けます. さらに  $a = e\mathcal{E}/m$  の関係を入れれば,

$$L = \frac{2\Phi}{\mathcal{E}} \sin 2\theta_0 \quad (15)$$

が得られます. この時点で  $e$  と  $m$  が消え, 電場中の軌道は荷電粒子の種類によらず  $\Phi$  によって決定されることが確認されます.

さて, (15) の右辺を  $\theta_0$  の関数と見れば,  $\theta_0 = 45^\circ$  のときに最大となり, すでに述べた通りの結果となります. そのときの  $L$  は,

$$L = \frac{2\Phi}{\mathcal{E}} \quad (16)$$

となります.

(15) と (16) の結果は, §9.2.1 で述べた軌道の相似性を直接示しています. すなわち, 加速電圧  $\Phi$ , あるいはエネルギー  $E = e\Phi$  と  $L$  が比例します.

ここで, PMA のエネルギー分散係数  $C_E$  を導いてみましょう.  $\theta_0 = 45^\circ$  の場合を考えればよいので, (16) をもちいます. §9.2.2 ではパスエネルギー  $E_p$  をもちいて定式化しましたが, ここでは  $E_p$  に対応する加速電圧を  $\Phi_p$  と書きます.

加速電圧が  $\Phi_p \rightarrow \Phi_p + \Delta\Phi$  と変化したときに  $L \rightarrow L + \Delta L$  となったとすれば, (16) から,

$$\Delta L = \frac{2\Delta\Phi}{\mathcal{E}} = \frac{2\Phi_p}{\mathcal{E}} \frac{\Delta\Phi}{\Phi_p} = L \frac{\Delta\Phi}{\Phi_p} \quad (17)$$

が得られます. エネルギーによる表式に変えれば,

$$\Delta L = L \frac{\Delta E}{E_p} \quad (18)$$

となり,  $C_E = L$  であることがわかります.

つぎに, 開口収差係数を求めてみます. 開口収差は,  $\theta_0$  が  $45^\circ$  でなくなったときに到着点が手前にずれる現象ですから, (5) すなわち  $\theta_0 = \pi/4 + \alpha_0$  とお

いて, (15) を  $\alpha_0$  でべき展開すればよいでしょう. すなわち, (15) を  $\alpha_0$  の関数と見て展開すれば,

$$L(\alpha_0) = \frac{2\Phi}{\mathcal{E}} \cos 2\alpha_0 = L \left( 1 - 2\alpha_0^2 + \frac{2}{3}\alpha_0^4 - \dots \right) \quad (19)$$

が得られます. ただし右辺の  $L$  は, (16) におけるものです.

(19) は, PMA の開口収差が 2 次, 4 次, … のように続くことを示しています. 最低次の 2 次だけ見れば,  $C_A = -2L$  であることがわかります.

## 9.4 円筒鏡型アナライザ

前節で解析した PMA において, 電場分布を  $z$  軸まわりにまらめて円筒対称性をもたせたものが, 円筒鏡型アナライザ (Cylindrical Mirror Analyzer: CMA) です.

CMA はその軸対称性から, 取り込み立体角の面で PMA とくらべて有利となり, 実用的に重要な位置を占めます. 解析の手法に関しては,  $zx$  平面上の軌道で考えれば PMA と本質的に変わるところはなく, 前節と平行した議論が可能です.

### 9.4.1 電位分布

円筒対称な電場分布は, 動径方向の座標を  $r$  とした場合, かならず  $1/r$  依存性を持ち, 電位分布でいえば  $\ln r$  依存性となります. これは, 電場にたいしてのガウスの法則からわかります.

PMA の一様電場のときはことなり, 円筒対称な電場は  $r = 0$  が特異点となるので, そのような場を空間全体でつくることはできません. そこで, 半径  $r_1$ ,  $r_2$  の二つの円筒を用意して, その円筒間に電場を形成します. 半径  $r_1$  の内側円筒をアース電位として, 外側の半径  $r_2$  の円筒に負の電位を与えます.

この電場中での電子軌道がどうなるかはまだわかりませんが, PMA との類推で考えるなら, 適当な場所に検出器を置いて電場強度をある値に設定すれば, パスエネルギー  $E_p$  が決まるはずで, この  $E_p$  は, 電場強度に比例することは確かです. なお以下では,  $E_p$  よりも, それに対応する加速電圧  $\Phi_p$  をなるべくもちいます. 両者の関係は  $E_p = e\Phi_p$  です. (§9.3.5 を参照してください.)

円筒間の電位分布  $V(r)$  は,  $\ln r$  依存性をもつこと,  $r = r_1$  の電位が 0 で  $r > r_1$  では負になること, そして電場強度が  $\Phi_p$  に比例すべきことを考えれば, 次の

形におけます。

$$V(r) = -\frac{\Phi_p}{K} \ln\left(\frac{r}{r_1}\right) \quad (20)$$

ここで、 $K(> 0)$  は電場強度を指定するための無次元のパラメタです。

外側円筒の半径  $r_2$  が変わっても、それに印加する電圧を変えれば電場分布は同じになるので、 $r_2$  は電場分布にたいして本質的な役割を果たしません。しかし、内側円筒の半径  $r_1$  はそうではなく、電場分布を規定するために必要なパラメタです。

以下では、 $r_1$  をCMAのサイズを指定するための量として扱い、 $r_1$  を固定したときの軌道の性質から  $K$  の最適値を決定する、という順番で考えていきます。

### 9.4.2 中心軌道の決定

PMA の場合には、1 次のフォーカスが得られるような特別な軌道、すなわち中心軌道が存在しました。CMA において、これに相当するものが存在するかどうかを調べてみます。

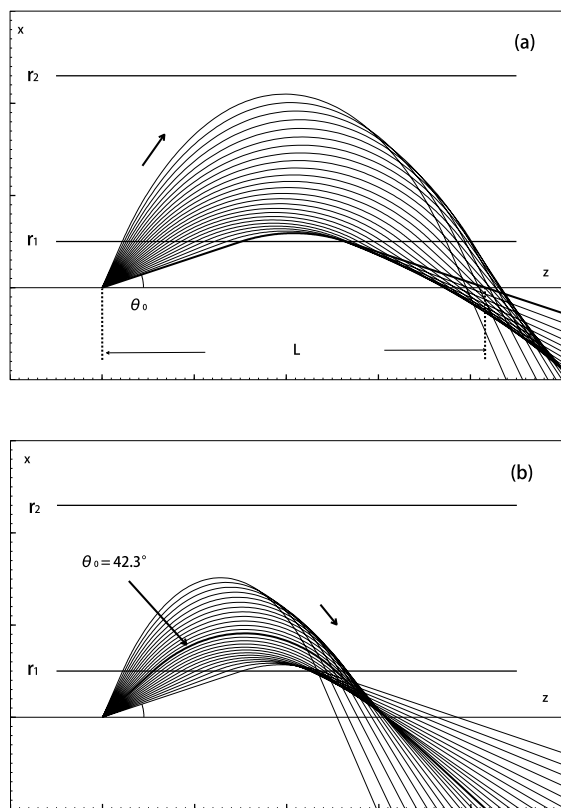


Fig. 7: Electron trajectories in the CMA: (a)  $K=1.7$  ; (b)  $K=1.3$ .

そのためには、(20) の場に広い角度範囲でビームを入射させて、軌道の様子を見ればよいでしょう。  $r_1$  はある値に固定して、(20) における  $K$  をいろいろ変えて試してみます。

まず Fig.7(a) は、 $K = 1.7$  の場合の軌道計算の結果です。内側円筒はメッシュでできていると考えて、計算上はこの境界を素通りさせています。

図を見ると、PMA の場合と異なり、到着点の位置が停留となる場所が二か所生じています。すなわち、入射角  $\theta_0$  をしだいに大きくしていったときに、到着点までの距離  $L$  は最初は減少しますが、一度止まってから増加に転じ、また止まって今度は減少をはじめます。(図においては、 $\theta_0$  が最小の軌道を太線で描いています。)

これらの停留点のそれぞれは、PMA と同じ性質のもの、すなわち、到着点が一瞬静止してからもとの方向に引き返していくようなものです。これは、入射角  $\theta_0$  に関して偶数次の変化であり、開口収差は 2 次からはじまるはずで

Fig.7(b) は  $K = 1.3$  の場合です。このときも停留点が存在しますが、これは性質が異なります。すなわち、到着点が一瞬静止したあとで、また同じ方向に移動をはじめます。これは、 $\theta_0$  に関して奇数次の停留点です。すなわち、この場合の開口収差は奇数次であり、3 次のものが最低次です。

このような状況は、 $K$  の値とともに変化していきます。 $K$  をいろいろ変えながら、 $\theta_0$  の関数としての到着点位置  $L$  をプロットしていくと Fig.8 が得られます。

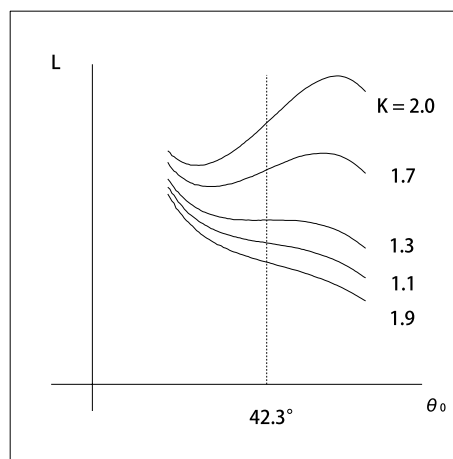


Fig. 8: Arriving position  $L$  of an electron as a function of initial angle  $\theta_0$ .

Fig.8 において、 $K = 1.7$  における二つの停留点と、

$K = 1.3$  の停留点を比べてみましょう。グラフの形を見れば、 $K = 1.3$  の停留点のほうが、到着点の座標  $L$  が一定に保たれるような角度範囲がひろいことがわかります。これは、停留点の次数の違いからくるものであり、一般に高次のものほど一か所にとどまる度合いが強まります。

そこで、CMA における  $K$  の最適値は 1.3 と決定されます。(さらに詳しく調べれば、1.31 となります。) このときの停留点の角度は、 $\theta_0 = 42.3^\circ$  となります。これは、PMA の場合の  $45^\circ$  という値に対応し、この角度で入射した軌道が中心軌道として選ばれます。

$K$  の最適値と中心軌道の選び方が決まったので、CMA の分散係数と開口収差係数も決まります。これらの係数は、アナライザのサイズを特徴づける量としての  $r_1$  をもちいて書けるはずですが、あるいは PMA のときのように、中心軌道の  $z$  軸方向の長さ  $L$  をもちいてもよいでしょう。

これ以降は、円筒対称場における電子軌道を求める必要がありますが、この議論は複雑になるので省略し、よく知られた結果だけを記します。

中心軌道にたいしての  $L$  は  $L = 6.1r_1$  と決まり、分散係数  $C_E$ 、および 3 次の開口収差係数  $C_A^{(3)}$  は次のように与えられます。

$$\begin{cases} C_E = 5.6r_1 = 0.92L \\ C_A^{(3)} = -15.4r_1 = -2.5L \end{cases} \quad (21)$$

これを見ると、 $C_E$  に関しては、PMA における  $C_E = L$  とほぼ同等であり、本質的な変化はありません。一方、開口収差は次数が 2 次から 3 次に変わっているため、収差係数の数値だけ比較しても意味がありません。この比較に関しては次節で考察します。

### 9.4.3 エネルギー分解能

入射電子のエネルギーが  $E$  から  $E + \Delta E$  に変化したときの到着点のずれを  $\Delta L_E$ 、 $\theta_0 = 42.3^\circ$  から測った角度を  $\alpha_0$  としたときの、開口収差による到着点のずれを  $\Delta L_A$  とすれば、これらは次の形におけます。

$$\begin{cases} \Delta L_E = C_E \frac{\Delta E}{E_p} \\ \Delta L_A = C_A^{(3)} \alpha_{0m}^3 \end{cases} \quad (22)$$

ここで  $\alpha_{0m}$  は、 $\alpha_0$  の最大値です。

PMA のときとの違いは開口収差の次数だけですか

ら、CMA の相対分解能の表式は、(9) に対応して、

$$\frac{\Delta E}{E_p} = \frac{C_A^{(3)}}{C_E} \alpha_{0m}^3 \quad (23)$$

が得られます。これに (21) の数値を入れれば、

$$\frac{\Delta E}{E_p} = 2.8 \alpha_{0m}^3 \quad (24)$$

となります。

この結果を、PMA の場合の (10) と比較してみましょう。 $\alpha_0 = 0.1 \text{ rad} \simeq 6^\circ$  で比較すれば、 $\alpha_{0m}$  にたいしての次数がひとつ上がったことで、相対分解能は約一桁小さくなるのがわかります。しかも、 $\alpha_{0m}$  を絞ったときの分解能の向上が、より急激に起こることになります。このように、CMA が 2 次の開口収差をもたないことによる優位さは、非常に顕著に現れます。

さて、ここまでは PMA の議論に平行するかたちで CMA の性質を述べてきました。しかし、CMA の電場は円筒対称である以前に軸対称であり、したがって通常の軸対称な静電レンズの特別な場合として見るのが可能です。CMA が静電レンズと異なる点は、光軸付近のビームが通過できず、軸外領域だけが利用されることだけです。

CMA のエネルギー分散は、軸対称レンズとして見たときの色収差そのものです。すなわち、(22) の第 1 式は、レンズとしての色収差に他なりません。一般のアナライザの分散と、レンズとしての色収差の関係は、§9.8.2 で詳しく議論します。

通常のレンズの球面収差がつくる最小錯乱円は、ガウス像面の手前にでき、したがって像面を光軸方向にずらすことでフォーカスを回復できます。一方 CMA では、ビームが一番絞られる位置は、光軸ではなく中心軌道にそって引きずられます。これにより、最小錯乱円に相当する場所は、円輪上に形成されます。この様子を Fig.9 に示します。

しかし、これはエネルギースペクトルを得るための障害にはなりません。よく行われているように、円輪状のスリットを用意して、それを通過した電子を検出器に導けばよいわけです。

CMA では、分散像を対象にすることはあまり行われませんが、入射エネルギーがパスエネルギーからずれた場合の軌道の変化も Fig.9 で示しています。分散像のフォーカス位置が傾く様子が見て取れますが、この事象は一般のアナライザにおいて起こりうるものです。これに関しても、§9.8.2 において一般的な議論を行います。

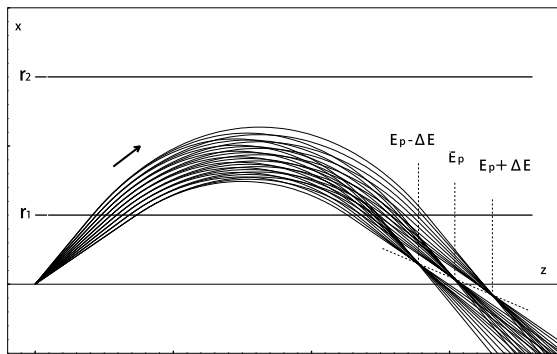


Fig. 9: Electron trajectories having energies near the pass energy  $E_p$ .

## 9.5 磁場偏向型アナライザ

歴史的に最初の電子分光は、放射性元素からのベータ線（すなわち電子線）を一樣磁場に入射させ、そのエネルギースペクトルを得たものです（1912年）。この一樣磁場をもちいたアナライザは、**磁場偏向型アナライザ**（MDA: Magnetic Deflection Analyzer）とよばれます。

すでに述べたPMAとCMAにおいては、電子は一方方向に振られるだけでした。しかし一樣磁場中においては、電子は円運動を行い、放っておけば周回運動を続けます。この周期性に注目することで、アナライザとしての動作の特性がとらえられます。

### 9.5.1 一樣磁場の作用

一樣磁場中における電子の円運動、いわゆるサイクロトロン運動に関しては、第2章と第6章で詳しく述べましたので、ここでは結果だけをもちいます。

磁場強度を  $B$ 、電子の速度を  $v$  とすれば、サイクロトロン半径  $r$  は次式で与えられます。

$$r = \frac{mv}{eB} \quad (25)$$

上式からわかるように、磁場強度を一定とすれば、サイクロトロン半径は電子の速度に比例します。そこで、電子を一樣磁場中に入射させて、その半径をなんらかの方法で測定すれば、速度が知れることになります。

(25) から、一樣電場をもちいたPMAとの本質的な違いが見てとれます。すなわち、一樣電場中では軌道の相似性が成り立ち、エネルギーを2倍にすれば

軌道の形状が2倍に拡大されました。しかし一樣磁場中では、円運動の半径は、エネルギーではなく速度に比例します。

MDAはその意味で、速度分析を行うものと考えられます。あるいは一般の荷電粒子にたいしては、(25)における  $p = mv$  をひとまとめにして、運動量を測るものと見なすこともできます。

電子分光においては、アナライザはエネルギー分析を行うものとして定式化する必要があります。電子の運動エネルギー  $E$  を、§9.3.5のときと同様に、加速電圧  $\Phi$  によって得たエネルギーとして  $E = e\Phi$  と表しましょう。 $v$  を  $\Phi$  で表せば、

$$v = \sqrt{\frac{2e\Phi}{m}} \quad (26)$$

となり、これを(25)に代入すれば、サイクロトロン半径と加速電圧の関係が次式のように得られます。

$$r = \frac{1}{B} \sqrt{\frac{2m\Phi}{e}} \quad (27)$$

Fig.10は、MDA中の電子軌道がエネルギーによって変わる様子を計算したものです。図には(27)で与えられる関係のグラフも示されています。のちに述べるように、エネルギー分散を決めるのは円運動の半径ではなく直径の変化量なので、グラフの縦軸は直径  $d = 2r$  を表示しています。

MDAにおいて、電子をどこで検出するべきかを考えます。Fig.10によれば、ある一点から入射した電子は入射エネルギーごとに異なった半径で回転しますが、半回転を終えたところで軌道間の距離の差が一番大きくなり、それをすぎるとまた同じ点に戻ります。そこで、半回転したあとの  $x$  軸に沿って検出器を置けば、エネルギーを分離する上で一番有利になることがわかります。

実際には、角度幅をもったビームが集束される位置を分散面として選ぶべきです。しかし、次節で示すように、そのように選んだ分散面はここで決めたものと一致します。

ここで、座標の取り方に関して述べておきます。一般にアナライザを議論する際には、初速の方向を  $z$  軸、エネルギー分散の方向を  $x$  軸にとるようにします。ここではそのように選んでいます。

ただし、初速の方向と分散方向の関係はアナライザの種類によってさまざまなので、この約束では都合がわるくなる場合もあります。そのときはこの原則は守られません。(PMAとCMAはそのような例です。)

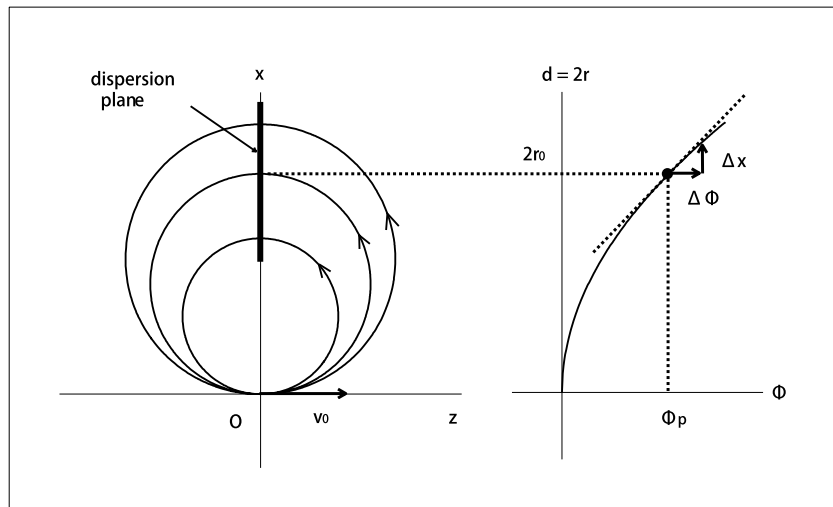


Fig. 10: Energy dispersion in a uniform magnetic field.

### 9.5.2 エネルギー分散係数

サイクロトロン半径がエネルギーに比例しないことから、MDAがつくる分散像はエネルギーに関して非線形になります。しかし § 9.2.2 ですでに述べたように、検出器を固定して磁場強度を掃引するのであれば、非線形性は磁場強度の変化のさせ方に効くだけで、得られるスペクトルに影響はありません。

検出器の位置を指定すれば、検出器に入ることのできる電子のサイクロトロン半径  $r_0$  が決まります。さらに、磁場強度をある値に設定すれば、パスエネルギー  $E_p$ 、あるいはそれに対応する加速電圧  $\Phi_p$  が定まります。(27)によって、 $r_0$  と  $B$ 、 $\Phi_p$  は次の関係にあります。

$$r_0 = \frac{1}{B} \sqrt{\frac{2m\Phi_p}{e}} \quad (28)$$

さて、MDAのアナライザとしてのエネルギー分散の大きさは、PMAやCMAのときと同じく、エネルギー分散係数  $C_E$  をもちいて次の形で与えられます。

$$\Delta x = C_E \frac{\Delta E}{E_p} \quad (29)$$

ここで、 $\Delta E/E_p$  は  $\Delta\Phi/\Phi_p$  としても同じです。

MDAの  $C_E$  は次のようにして求められます。磁場強度は一定のまま、電子の加速電圧が  $\Phi_p$  から  $\Phi_p + \Delta\Phi$  に変わったとして、そのときにサイクロトロン半径が  $r_0 \rightarrow r_0 + \Delta r$  のように変化したとします。 $\Delta r$  は、次式のように  $\Delta\Phi$  に関してべき展開されます。

$$\Delta r = \frac{1}{B} \sqrt{\frac{2m}{e}} (\sqrt{\Phi_p + \Delta\Phi} - \sqrt{\Phi_p})$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{B} \sqrt{\frac{2m\Phi_p}{e}} \left( \sqrt{1 + \frac{\Delta\Phi}{\Phi_p}} - 1 \right) \\ &= r_0 \left[ \frac{1}{2} \frac{\Delta\Phi}{\Phi_p} - \frac{1}{8} \left( \frac{\Delta\Phi}{\Phi_p} \right)^2 + \dots \right] \quad (30) \end{aligned}$$

この最後の変形で、テイラー展開の公式  $\sqrt{1+x} = 1 + x/2 - x^2/8 + \dots$  をもちいています。

MDAの分散係数は、(30)における  $\Delta\Phi$  に関しての1次の項に対応します。ここで注意すべきは、エネルギー分散  $\Delta x$  は半径の変化量  $\Delta r$  ではなく、これの2倍、すなわち直径  $d$  の変化量です。そこで  $\Delta x$  は、(30)を2倍した次式で与えられることになります。

$$\Delta x = r_0 \frac{\Delta\Phi}{\Phi_p} - \frac{r_0}{4} \left( \frac{\Delta\Phi}{\Phi_p} \right)^2 + \dots \quad (31)$$

MDAのエネルギー分散係数  $C_E$  は、上式の1次項の係数として次のように与えられます。

$$C_E = r_0 \quad (32)$$

このように  $\Delta\Phi$  に関して1次の項を取り出すことは、Fig.10に示されているように、 $\Phi_p$  における  $d$  のグラフの接線でその近傍のふるまいを表現することに相当します。その接線からのずれは、(31)の高次項によって与えられます。しかし、場を掃引する方法であれば検出器位置の近傍だけが問題なので、 $C_E$  の値を知ればそれで十分です。

なお、最初から高次項に興味がなく、エネルギー分散係数  $C_E$  だけが知りたいのであれば、上記より早い

導出方法があります。(28)において、 $r_0$ を $\Phi_p$ の関数と見なし、両辺の対数をとってから微分すれば、

$$\frac{\Delta r}{r_0} = \frac{1}{2} \frac{\Delta \Phi}{\Phi_p} \quad (33)$$

となり、これから、

$$\Delta r = \frac{r_0}{2} \frac{\Delta E}{E_p} \quad (34)$$

が得られます。これは、いわゆる対数微分のテクニックです。右辺の係数を2倍したものが $C_E$ です。

PMAやCMAのときと同様に、 $C_E$ は長さの次元をもち、アナライザのサイズを特徴づける値となります。ここでは、サイクロトロン半径 $r_0$ がその役目をはたしています。

### 9.5.3 開口収差

前節では、磁場中のある一点から決まった方向で出発する電子だけを考えていました。ビームが角度幅をもつ場合の、軌道の様子を調べてみましょう。

Fig.11(a)は、同じエネルギーの電子をいろいろな角度で磁場に入射させたときの軌道です。これらはすべてエネルギーが同一なので、サイクロトロン半径は共通であり、入射角の違いによって図のような軌道が描かれます。

この図を見ると、入射角 $\alpha_0$ によってまったく異なった方向に飛んでいってしまうのではなく、分散面における到着点はそこそそ近い位置になっています。入射角 $\alpha_0 = 0$ の電子軌道を中心軌道とすれば、ほかの入射角の電子は、この中心軌道の方向に引き戻されています。

この「引き戻す」作用は、単にすべての軌道が同一の半径をもつ円であることからの帰結であり、それ以上のものではありません。しかし、中心軌道に向かう集束作用が存在することに間違いはありません。すなわちMDAは、エネルギー分散の作用と同時に、レンズとしての集束作用を併せもつものです。(図では中心軌道を太線で描いています。)

収差の様子をよく見ると、 $\alpha_0$ が大きいほど検出面において手前に落ちる、すなわち $x$ 座標の小さい側に到着していることがわかります。これはPMAと同様に、 $\alpha_0$ の偶数次の開口収差です。最低次の2次の項はやはり、開口収差係数 $C_A$ をもちいて、

$$\Delta x = C_A \alpha_0^2 \quad (35)$$

のかたちで与えられます。

さてFig.11(a)では、分散面に至る軌道だけでなく、それを通りすぎて入射点に戻る軌道も描かれています。入射ビームは検出面では開口収差によってボケるものの、もう半回転すればすべて入射点に戻っています。すなわち、開口収差は存在しません。しかし、ここではエネルギー分散の作用も同時に消えてしまうので、残念ながらアナライザとしては動作しません。

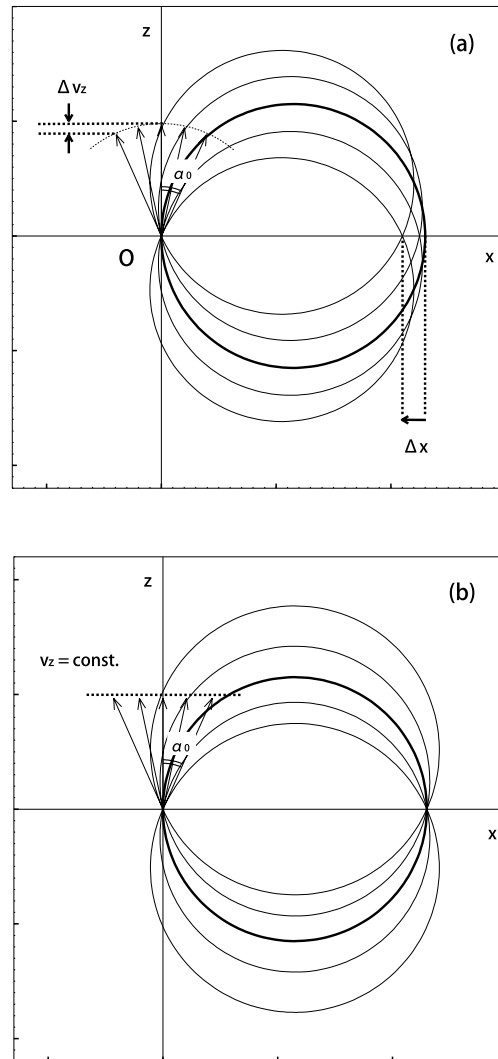


Fig. 11: (a) Aperture aberration of the MDA for the electrons with the same velocity. (b) Aperture aberration is absent when the electrons have the same  $v_z$ .

エネルギー分散が最大となる位置では開口収差が大きく、開口収差が消える場所では分散も消えてしまうということは、たまたま不幸な事実であるようにも思えます。しかし、そうではないのだという議論も可能です。それを以下で述べます。

すでに第2章で述べたことですが、Fig.11(a)の状

況において、もし入射電子の  $z$  方向の速度成分が一定であれば、半回転したところで同一の点に集束します。すなわち Fig.11(b) のようになります。(こうなることの証明は結構やっかいなので、ここでも第2章と同様に、軌道計算の結果によって納得していただくだけにします。)

この図の軌道は、エネルギーはすべて異なっています。すなわち、 $v_z$  が共通であり、そして  $v_x$  はまちまちですから、初期速度ベクトルの大きさ  $v_0 = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$  はそろっていません。したがって、サイクロトロン半径も軌道ごとに異なることになります。このような場合にだけ、円の集合は、図のように異なる2点で交わることができます。

そこで一様磁場の作用は、 $v_z$  の値ごとに同一の点に集束させる作用をもつと考えることができます。すなわち、作用の本質は速度分散でもエネルギー分散もなく、「 $v_z$  分散」であるということです。MDA を  $v_z$  の違いを検出するアナライザであると考えれば、収差をもたない理想的な動作を示すわけです。

ここで Fig.11(a) の状況に戻ると、この図の軌道はすべて同じエネルギーをもち、よって  $v_z$  の値はそろっていません。したがって、これらの軌道は  $v_z$  の値ごとに異なる点に到着することになります。これが開口収差に他なりません。すなわち開口収差は、「 $v_z$  分散」作用の直接の帰結であると見なすことができます。

この事実をもちいれば、 $C_A$  の具体的な表式を導くことができます。まず、速度  $v_0$  が共通の軌道にたいして、 $v_z$  と  $\alpha_0$  の関係は次のようになります。

$$v_z = v_0 \cos \alpha_0 = v_0 \left( 1 - \frac{\alpha_0^2}{2} + \frac{\alpha_0^4}{24} - \dots \right) \quad (36)$$

ここで  $\alpha_0$  の4次以降を落とせば、 $\alpha_0$  による  $v_z$  の変化量は  $\Delta v = -v_0 \alpha_0^2 / 2$  となり、よって、

$$\frac{\Delta v}{v_0} = -\frac{1}{2} \alpha_0^2 \quad (37)$$

が得られます。

一方、(27) より  $\Phi \propto v^2$  の関係を対数微分することで、

$$\frac{\Delta \Phi}{\Phi_0} = 2 \frac{\Delta v}{v_0} \quad (38)$$

が得られ、これと (37) から、

$$\frac{\Delta \Phi}{\Phi_0} = -\alpha_0^2 \quad (39)$$

が導かれます。

上式が与える  $\Delta \Phi$  は、 $\alpha_0$  による  $v_z$  の減少量  $\Delta v$  を、 $z$  軸に沿って  $\alpha_0 = 0$  で電子が入射したと考えたとき

の加速電圧の変化量に換算したものです。そこで、開口収差による到着点のずれ  $\Delta x$  は、上式が与えるエネルギー差に対応するエネルギー分散として与えられます。すなわち、(29) における  $\Delta \Phi / \Phi_p$  として (39) の  $\Delta \Phi / \Phi_0$  をもちいれば、

$$\Delta x = -C_E \alpha_0^2 \quad (40)$$

が得られ、これと (35) を見比べれば、

$$C_A = -C_E \quad (41)$$

という関係が導かれます。すなわち、MDA の開口収差係数は  $C_A = -C_E = -r_0$  であり、絶対値は  $C_E$  と同一であることがわかりました。

このように、MDA の開口収差は分散作用に由来するものであり、 $C_A$  は  $C_E$  をもちいて表されます。一回転すると分散作用が消えるので、分散作用に由来する開口収差も消えるのです。分散が最大の面で開口収差が生じるのは、不幸な偶然なのではなく、ここでの解釈からすれば必然であるわけです。

MDA の  $C_E$  と  $C_A$  が知れたので、エネルギー分解能を議論することができます。PMA のところで導いた公式 (9)、すなわち、

$$\frac{\Delta E}{E_p} = \frac{C_A}{C_E} \alpha_{0m}^2 \quad (42)$$

をそのまま適用することができます。MDA では  $C_A = -C_E$  でしたから、上式は、

$$\frac{\Delta E}{E_p} = \alpha_{0m}^2 \quad (43)$$

となります。(やはり負号は無視します。) これは、PMA より2倍よい分解能を与えています。

上式は結局、(39) に戻ったことになっています。すなわち、角度幅は  $z$  方向に換算したエネルギーの不確定さに対応し、それがそのまま分散面でのボケとなって、分解能を決定します。

#### 9.5.4 無収差結像性

一様磁場中で一回転すれば、そこではエネルギー分散も開口収差も0ですから、エネルギーと入射角がなんであろうとも、最終的には出発点に戻ってきます。すなわち、Fig.12 の状況です。

これは、レンズの言葉でいえば、球面収差も色収差も0であるということです。すでに前章までに何度か述べているように、軸対称な電子レンズは球面収



差も色収差も0にするのは不可能です。したがって、今われわれが見ている状況というのは、電子光学においてきわめて特異なケースであるわけです。

もちろん、一回転すると電子は同じ場所に戻ってきってしまうので、一様磁場の系をそのまま結像レンズとしてもちいることはできません。しかし、この系において収差が存在しないこと背景が理解されれば、その原理を従来のレンズ系に適用できないとも限りません。アナライザの理論を研究することは、分光系のためだけではありません。

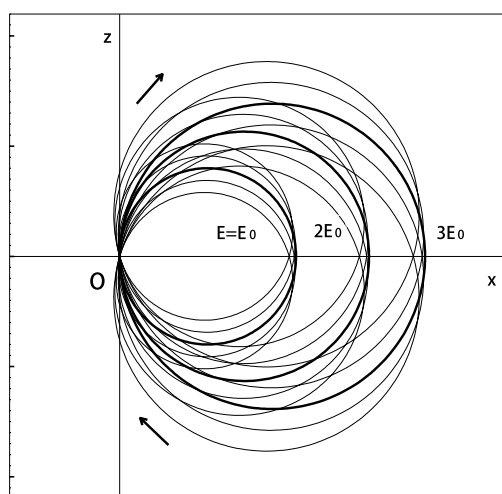


Fig. 12: Both the energy dispersion and aperture aberration disappear when the trajectories return to the starting point.

## 9.6 静電同心球アナライザ

一様磁場をもちいた MDA と似た動作を、電場をもちいて行わせることが可能です。実用上重要なのは球対称電場をもちいたものであり、このタイプのアナライザは、静電同心半球型アナライザ (Concentric Hemispherical Analyzer: CHA) とよばれます。

### 9.6.1 電場の対称性

一様磁場中では、ローレンツ力はつねに運動方向に直交し、電子は初期条件によらずかならず円運動となりました。そのような状況は電場中では不可能です。しかし、特定の初期条件にたいして円運動となるような電場分布であれば、可能です。

電子が円運動を行うためには、つねにその円の中心に向かって、同一の力がはたらいていなければな

りません。そのような力をおよぼす電場分布として、円筒対称なもの、および球対称なものを考えることができます。

CMA の議論の際に述べたように、円筒対称な電場は、対称中心を原点とした動径座標  $r$  に関して  $1/r$  依存性を持ちます。一方、球対称な電場は  $1/r^2$  依存性となります。円筒対称場は、無限に長い線電荷がつくる場と同じです。一方、球対称場は原点においた点電荷がつくる電場と同じです。たとえば、球対称であつてかつ  $1/r$  依存性をもつような電場をつくることは不可能であることに注意しましょう。

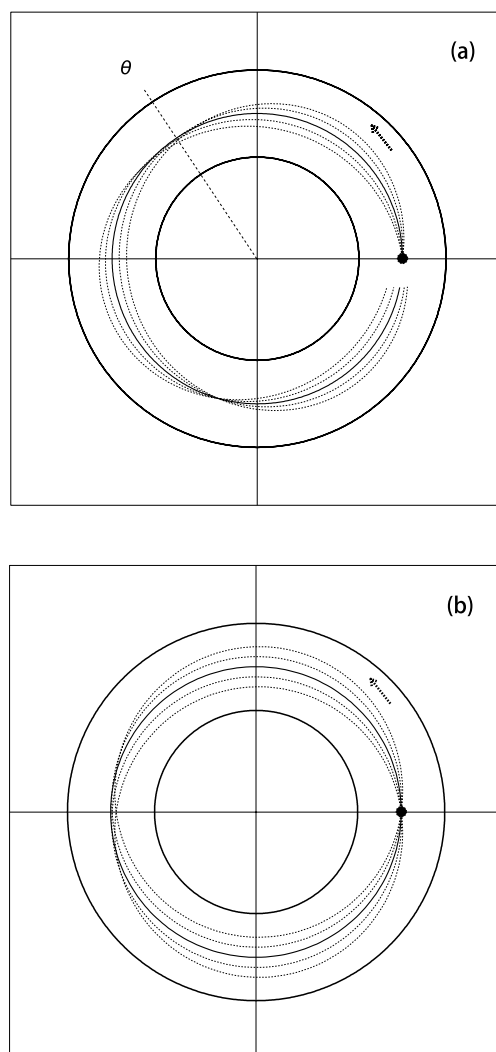


Fig. 13: Electron trajectories in the electric fields with (a) cylindrical symmetry and (b) spherical symmetry.

$1/r^2$  依存性をもつ球対称電場は、いわゆる「逆自乗法則」にしたがう場であり、クーロン型といういいかたがされることもあります。あるいは、太陽が惑星

におよぼす万有引力の場と同じ形であり、このような電場中の電子の軌道は、惑星のケプラー運動と数式上は同一となります。以下では、球対称電場中の電子の運動をケプラー運動として記すことにします。ケプラー運動の特性は力学の教科書に詳しく記されていますが、円筒対称場中の運動はあまりお目にかかることがありません。そこで、これら二つの場の中での電子軌道を数値計算してみます。

まず Fig.13(a) は円筒電場中の軌道です。場は紙面に垂直な方向に無限に続いていると考えます。紙面上の電子軌道は、最初に  $180^\circ$  より手前の角度  $\theta$  で集束して、その2倍の角度で再び集束します。この様子は、集束位置を別にすれば、一様磁場中の軌道とよく似ています。すなわち、最初の集束位置では収差が存在し、二回目は1点に戻っています。

この場合の集束位置を示す角度  $\theta$  は、実はきれいのよい角度ではなく、 $2\pi:\theta$  は無理数となります。従って、場の中を何回転しても、初期条件で与えた状態に戻ることはありません。つまり、軌道が閉じることがありません。

一方、球対称電場中の軌道、すなわちケプラー運動を軌道平面上で示したものが Fig.13(b) です。このときは一様磁場の場合と同様に、 $\theta = \pi$  で収差をとまなう集束をして、 $\theta = 2\pi$  で完全にもとの状態に戻ります。すなわち軌道が閉じます。

純粋に力学の問題として、任意の  $r$  依存性をもつ球対称な力の場を考えた場合、何回転かのちに質点の軌道が閉じるのは、逆自乗法則にしたがう場と、等方的な調和振動子の場合しかありません。これは**ベルトランの定理** (Bertrand's theorem) として知られています。ケプラー運動の軌道が閉じるという事実は、太陽系の安定性に寄与しているであろうことが容易に想像されます。

円筒対称場では、紙面に垂直な方向には力がはたらかず、ドリフト運動をするだけです。一方、球対称であれば、この方向に速度成分をもつ電子でも集束作用があります。そこで、実用性を考えれば球対称場が有利です。次節から、球対称電場をもちいたアナライザ、すなわち CHA の動作を詳しく調べます。

### 9.6.2 CHA の電位分布

Fig.14 のように、同心の球面をもつ二つの電極を用意して、それらに異なる電位を与えれば、球対称な電場がつくれます。これらの電極を、以下では簡単に内球、外球とよぶことにします。

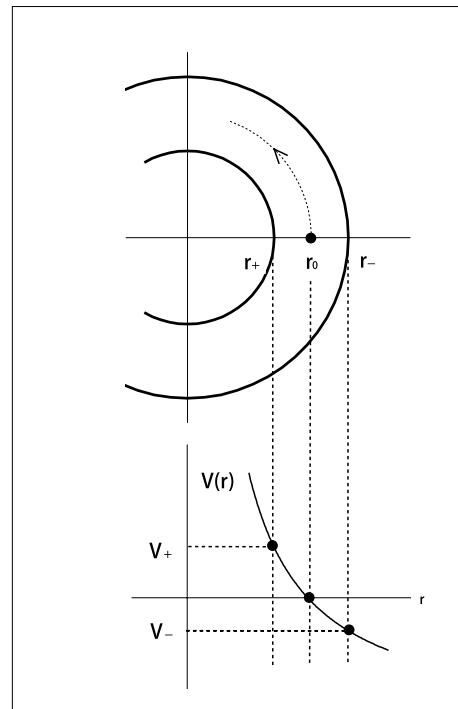


Fig. 14: Electric potential distribution between the inner and outer spherical electrodes.

ガウスの法則によって、内球と外球に与える電位がどうであっても、必ず逆自乗法則にしたがう電場がつくれます。すなわち、次のかたちです。

$$\mathcal{E}(r) = \frac{A}{r^2} \quad (44)$$

あるいは、電位分布でいえば、

$$V(r) = \frac{A}{r} + B \quad (45)$$

のかたちにおいて、両者の関係は  $\mathcal{E}(r) = -dV(r)/dr$  です。定数  $A$  は電場強度を決定し、一方定数  $B$  は、電位の原点のとりかたを指定するものです。

一様磁場中の電子軌道は必ず円でしたが、ケプラー運動のうち有界なものは一般に楕円となり、特別な条件をみたまのだけが円運動となります。CHA では、そのような円軌道が中心軌道として扱われます。

もし初期エネルギーが大きすぎると、軌道は放物線か双曲線となり、惑星であれば無限遠点に飛び去ってしまいます。そのような軌道は途中で外球にぶつかってしまうので、ここでは考察の対象外です。

軌道が半径  $r_0$  の中心軌道に沿うような電子のエネルギー、すなわちパスエネルギー  $E_p$  は、電場強度を指定すれば定まります。 $r = r_0$  における電場強度を  $\mathcal{E}_0$ 、 $E_p$  に対応する電子の速度を  $v_p$  とすれば、円運動

を与える運動方程式は、

$$m \frac{v_p^2}{r_0} = e\mathcal{E}_0 \quad (46)$$

となります。

ここで  $v_p$  を加速電圧  $\Phi_p$  で表せば、 $v_p = \sqrt{2e\Phi_p/m}$  となり、これを上式に入れば、

$$\mathcal{E}_0 = \frac{2\Phi_p}{r_0} \quad (47)$$

という関係が得られます。上式は、加速電圧  $\Phi_p$  の電子が半径  $r_0$  の円運動を行うための電場強度を与えています。

そこで、(44) と (45) において、 $r = r_0$  における電場強度が (47) になるように  $A$  を決めることができます。さらに、 $r = r_0$  における電位が 0 となるように  $B$  を決めることにします。電子ビームが  $r = r_0$  の位置から入射すると考える際に、このように決めておく都合がよいからです。

これらの約束のもとに、電場と電位の分布として次の表式が得られます。

$$\mathcal{E}(r) = \frac{2\Phi_p r_0}{r^2}, \quad V(r) = 2\Phi_p \left( \frac{r_0}{r} - 1 \right) \quad (48)$$

上の第2式をもちいば、内球と外球の半径をそれぞれ  $r_+$ 、 $r_-$  とするとき、それぞれに印加すべき電圧が次式のように与えられます。

$$\begin{cases} V_+ = 2\Phi_p \left( \frac{r_0}{r_+} - 1 \right) \\ V_- = 2\Phi_p \left( \frac{r_0}{r_-} - 1 \right) \end{cases} \quad (49)$$

### 9.6.3 電子軌道の解析

CHA の電場中における電子軌道を数値的に計算するのは、難しいことではありません。しかし、軌道を解析的に表そうとすれば、話は別です。

すでに述べたように、ケプラー運動で軌道が有界なものは一般に楕円となり、この軌道の解析的な表式を得るのは簡単ではありません。しかし CHA は、中心軌道から離れた軌道を引き戻す作用、すなわちレンズ作用が軌道方程式のかたちで明確に示される、数少ない例です。そこで、やや詳しく軌道の導出過程を示すことにします。

まず (48) の第1式から、電子にはたらく力の場は、

$$F(r) = -e\mathcal{E}(r) = -\frac{2e\Phi_p r_0}{r^2} \quad (50)$$

となります。これを  $F(r) = -dU(r)/dr$  として与える力学的ポテンシャル  $U(r)$  は、次式で与えられます。

$$U(r) = -\frac{2e\Phi_p r_0}{r} \quad (51)$$

さて、電子の座標としては極座標  $r$ 、 $\theta$  をもちいるのが適当です。極座標をもちいた運動の解析は第6章で詳しく述べたので、ここでは簡単に要点だけ記します。

まず、極座標のもとでの電子の運動方程式は、

$$\begin{cases} m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = F(r) \\ m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) = 0 \end{cases} \quad (52)$$

で与えられます。この第2式から、次の角運動量保存則が導かれます。

$$mr^2\dot{\theta} = L \quad (53)$$

そして、この式を  $\dot{\theta}$  で解いて (52) の第1式に入れば、 $\theta$  が消去されて、 $r$  がみたくべき運動方程式として、

$$m\ddot{r} = F(r) + \frac{L^2}{mr^3} \quad (54)$$

が得られます。

角運動量  $L$  は保存量なので、電子の初期条件を与えれば値が決まります。ここでは簡単のために、Fig.15 のように、 $r = r_0$  から速度  $v$  で接線方向に沿って入射した場合を考えます。速度  $v$  は、対応する加速電圧  $\phi$  で表せば  $v = \sqrt{2e\phi/m}$  となり、よって  $L$  は次のように与えられます。

$$L = mvr_0 = r_0\sqrt{2me\Phi} \quad (55)$$

上式の  $v$  と  $\Phi$  は、一般の初期条件を指定するものであり、パスエネルギー  $E_p$  に対応するものではないことに注意しましょう。すなわち、エネルギー  $E_p$  で入射した電子が円運動を行うように電場強度が設定されたから、 $\Phi_p$  は電場強度を指定するパラメタ、そして  $\Phi$  は、入射する電子の運動エネルギーを任意に指定する量です。

(54) の右辺の第2項は、見かけの力として現れた遠心力です。 $\theta$  方向の運動を忘れて  $r$  の時間変化を1次元的に考えると、 $r$  が 0 に近づこうとする際にそれに反発する作用がはたらきます。そこで、右辺第1項の原点  $O$  に向かう引力と、反発する第2項の二つの力の場が存在するわけです。

(54) の右辺を導くようなポテンシャルは、次式で与えられます。

$$\begin{aligned} U_{eff}(r) &= U(r) + \frac{L^2}{2mr^2} \\ &= -\frac{2e\Phi_p r_0}{r} + \frac{e\Phi r_0^2}{r^2} \end{aligned} \quad (56)$$

これはしばしば有効ポテンシャルとよばれ、 $r$  方向に1次元運動と見なしたときに、このポテンシャル中での運動として見る事ができます。

この作用のもとで、電子はある  $r$  の領域に制限されます。すなわち、二つの力がつりあうような  $r$  の値が存在して、そこから離れようとすると元の位置に引き戻されます。これは、中心軌道から離れた際にそこに引き戻そうとするレンズ作用として解釈できるはずで

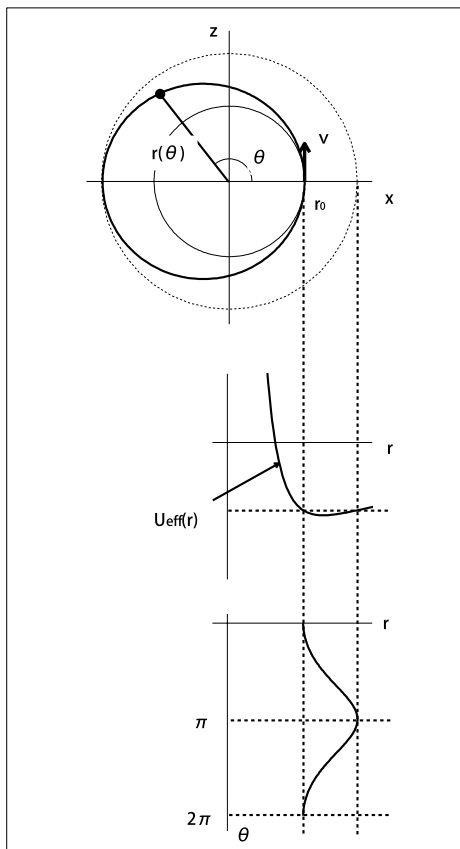


Fig. 15: An elliptic trajectory in the effective potential  $U_{eff}(r)$  of the electric field with spherical symmetry.

とすれば、(56)の有効ポテンシャルのもとでの運動は、ある位置を中心とした振動となるはずで

これを確かめるために、(54)を直接扱ってもよいのですが、最終的には  $r$  の時間変化ではなく軌道を与える式がほしいわけです。そこで、先に運動方程式から時間を消去して、軌道  $r = r(\theta)$  を与える方程式を導いてみます。

時間を消去するために、角運動量保存則 (53) が利用できます。この関係式は  $\dot{\theta} = d\theta/dt$ 、すなわち時間変化  $dt$  とそれに対応した  $\theta$  の変化  $d\theta$  の関係を与え

るので、これを用いれば独立変数を  $t$  から  $\theta$  に変換できます。形式的には、

$$\frac{d}{dt} = \frac{L}{mr^2} \frac{d}{d\theta} \quad (57)$$

と置き換えればよく、この関係を (54) に適用すれば、

$$\frac{L^2}{mr^2} \frac{d}{d\theta} \left[ \frac{1}{r^2} \frac{dr}{d\theta} \right] = F(r) + \frac{L^2}{mr^3} \quad (58)$$

が得られます。

上式を  $r(\theta)$  にたいする微分方程式として見ると扱いにくいですが、未知関数を  $r$  から  $u = 1/r$  に変換すれば簡単になります。すなわち、 $du/d\theta = -(dr/d\theta)/r^2$  となるので、(58) は、

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} = -u - \frac{m}{L^2u^2} F\left(\frac{1}{u}\right) \quad (59)$$

となります。右辺の  $F(1/u)$  は、 $F(r)$  の中の  $r$  を  $1/u$  で置きかえたものです。

(59) は任意の力の場合  $F(r)$  にたいして成立しますが、逆自乗法則の場合であれば  $F(r) \propto 1/r^2$ 、すなわち  $F(1/u) \propto u^2$  となるので、右辺第2項の  $u$  依存性は消えて単なる定数となります。

(50) と (55) をもちいれば、最終的に (59) は次のようになります。

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} = -u - \frac{1}{r_0} \frac{\Phi_p}{\Phi} \quad (60)$$

上式は、電子軌道  $r = r(\theta)$  の逆数、 $u = 1/r$  に関して表した軌道方程式です。上式には  $m$  と  $e$  が含まれないことに注意しましょう。これは何度かふれたように、電場中の荷電粒子の軌道は加速ポテンシャルによって決定されるという事実の現れです。

(60) は、調和振動子の方程式によく似ていることに気がつきます。右辺が第1項だけなら調和振動子そのものであり、それに定数としての第2項が加わっています。このタイプの微分方程式は、実はアナライザの動作を一般に特徴づけるものです。これに関しては §9.8.1 で詳しく述べることにして、ここでは (60) をただ機械的に解くだけにします。

まず、(60) の右辺は  $-(u - (\Phi_p/\Phi)/r_0)$  と書けるので、 $y = (u - (\Phi_p/\Phi)/r_0)$  とおけば、(60) は次のようになります。

$$\frac{d^2y}{d\theta^2} = -y \quad (61)$$

これは調和振動の方程式なので、一般解は簡単に求められます。その解を元の変数  $u$  にもどして書けば、

$$u = A \cos \theta + B \sin \theta + \frac{1}{r_0} \frac{\Phi_p}{\Phi} \quad (62)$$

です。

上式の定数  $A, B$  は,  $u(\theta) = 1/r(\theta)$  に関する初期条件から決められます. すなわち,  $u(0) = 1/r_0$ ,  $(du/d\theta)_{\theta=0} = 0$  を要求すれば,  $A = (1 - \theta_0/\theta)/r_0$ ,  $B = 0$  となり, 最終的に次式が導かれます.

$$\frac{1}{r(\theta)} = \frac{1}{r_0} \left[ \cos \theta + \frac{\Phi_0}{\Phi} (1 - \cos \theta) \right] \quad (63)$$

われわれが期待したのは,  $r(\theta)$  がある値を中心にして調和振動するような解であったわけですが,  $r$  ではなく  $u = 1/r$  がそのような解となりました. そこで,  $r$  ははずんだ調和振動のような変化をすることになります. これは, 決まった周期をもった振動解であることには変わりがなく, これが CHA のレンズ作用に他なりません.

### 9.6.4 エネルギー分散

CHA によってエネルギー分散が得られる様子を, Fig.16 に示します. 半径  $r = r_0$  の点から接線方向に沿って出発する電子のうち, 円運動となるのは特定のエネルギー  $E_p$  をもつものだけであり, それと異なるエネルギーをもつものは楕円軌道となります.

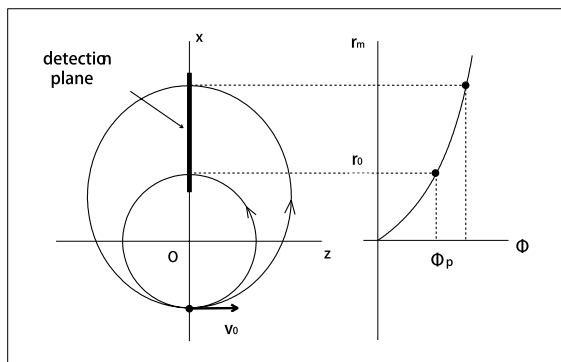


Fig. 16: Energy dispersion of the CHA.

MDA のときと同様に, もっともエネルギー分散が大きくなるのは半回転後であり, 一回転すると分散が消えてもとの点に戻ってしまいます.

CHA のエネルギー分散の表式を得るために, 前節で導いた軌道の式 (63) をもちいます. 楕円の長半径を  $r_m$  とすれば, これは (63) において  $\theta = \pi$  のときの  $r$  の値であり, 次式のようにになります.

$$r_m = \frac{\Phi}{2\Phi_p - \Phi} r_0 \quad (64)$$

上式に  $\Phi = \Phi_p + \Delta\Phi$  を入れて,  $\Delta\Phi$  に関してべき展開します. エネルギー分散は  $\Delta x = r_m - r_0$  であり, 最終的に次式が得られます.

$$\Delta x = 2r_0 \frac{\Delta\Phi}{\Phi_0} + 2r_0 \left( \frac{\Delta\Phi}{\Phi_0} \right)^2 + \dots \quad (65)$$

これから, CHA のエネルギー分散係数は

$$C_E = 2r_0 \quad (66)$$

であることがわかります. この  $C_E$  は, 同一の中心軌道半径の MDA の 2 倍の値です. すなわち, CHA は MDA にくらべて 2 倍のエネルギー分散作用をもつわけです.

### 9.6.5 開口収差

同一のエネルギーの電子で初期角度に幅を持たせて軌道を計算してみると, Fig.17 のようになります. 一様磁場のときと同様に, やはり  $\alpha_0$  が大きいほど手前に落ち, 2 次開口収差が存在することがわかります.

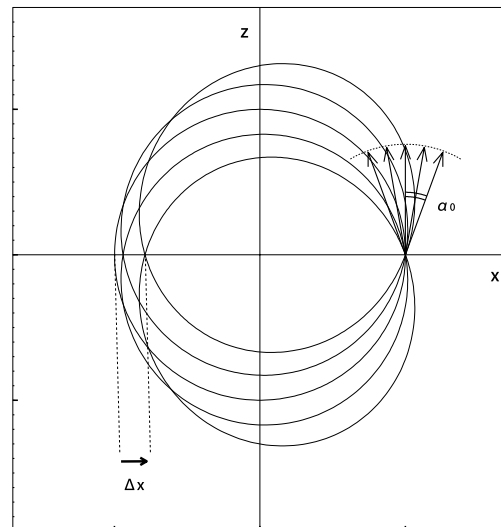


Fig. 17: Second order aperture aberration of the CHA.

一様磁場の場合,  $v_z$  の共通な電子は検出面で一点に集まるのですが, これは今の場合も同様です. Fig.18 は,  $v_z$  が共通の軌道が, 半回転ののちに同一の点に集まる様子を示しています.  $v_z$  の値が角運動量  $L$  を決めることから,  $v_z$  が共通の軌道は同一の有効ポテンシャル  $U_{eff}$  をもち, このポテンシャルの極小点から出発します. そこで  $\theta = \pi$  では,  $\alpha_0$  とは無関係に  $r = r_0$  に達することがいえます.

このことから、CHAもMDAと同様に、本質は「 $v_z$ 分散」作用であることがわかります。あるいは、角運動量にたいしての分散といっても同じです。

CHAの開口収差は、MDAと同様に「 $v_z$ 分散」から説明がつくこととなります。すなわち、まったく同じ議論によって、

$$C_A = -C_E \quad (67)$$

が得られます。そこで、CHAの開口収差係数は、

$$C_A = -2r_0 \quad (68)$$

で与えられます。

このように、CHAはMDAより $C_E$ が2倍大きいかわりに、 $C_A$ も2倍大きいわけです。エネルギー分解能を決めるのは $C_A/C_E$ でしたから、結局MDAとCHAは、分解能の面で差が生じません。

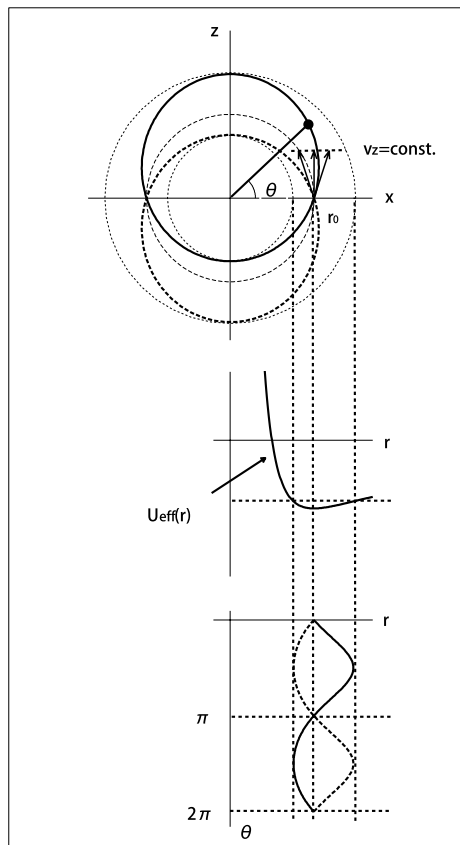


Fig. 18: Electron trajectories with the same  $v_z$  meet on the dispersion plane.

### 9.6.6 フリンジ場の影響

ここまでの議論においては、理想的な球対称電場を想定して、その場の中の一点から電子が出発すると思えました。現実には、電子を場のない領域からそのような電場中に入射させる必要があります。よって場の境界を考慮する必要があります。

通常、境界における場の分布をフリンジ場 (Fringing Field)、あるいは端縁場と称します。これは具体的な電極や磁極の構造に依存するので、数値計算が要求されます。ここでは、CHAのフリンジ場の影響を、計算結果をもとに考察してみます。

CHAは通常、入り口に適当な幅のスリットが置かれ、そこから電子を入射させますが、その境界を通る際の電子軌道を計算してみましょう。Fig.19(a)は、フリンジ部分の電位分布の計算例、図(b)は軌道計算の結果です。

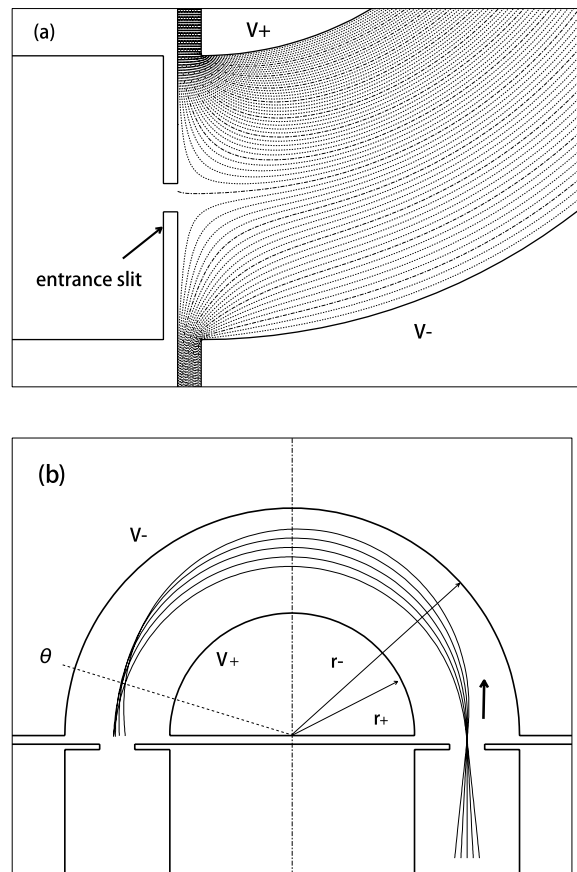


Fig. 19: (a) Contours of the electrostatic potential near the entrance of the CHA. (b) Electron trajectories are deflected outward by the effect of fringing field.

Fig.19(b)の結果が示すように、フリンジ場の領域においてビームが外球側に偏向されます。フリンジ

領域の静電ポテンシャルの等高線からわかるように、ここでは本来の理想的な球対称電場よりも球の中心に向かう偏向力が弱まります。これが、ビームが外球側に振られる理由です。

そこで、電子軌道はフリンジ領域でまず外側に振られて理想場に入り、余分に強いレンズ作用を受けて内側に振り戻されます。これによって、半球の出口で集束するはずの電子が、それより手前の角度  $\theta$  で集束してしまいます。この角度は、フリンジ部分の電極構造にはあまり影響を受けません。

そこで、フリンジ場の影響とは、集束面の角度を  $180^\circ$  から減ずる効果であることとなります。この影響をそのままにして半球の出口に検出器をおくと、ここではビームが大きくボケてしまうので分解能を損ないます。

この対処方法として、電場の開き角を  $180^\circ$  より減らして、集束位置を検出面にもってこることが考えられます。しかし、集束位置がずれてしまう原因は入口での偏向作用ですから、この効果を打ち消す方法でもよいわけです。たとえば、ビームの入射方向を少し内球側に傾けるのが一法です。あるいは、入口に偏向場をつくってビームを振り戻すのもよいでしょう。このためには、必ずしも偏向器を導入する必要はなく、入口だけ内球と外球の間隔を狭めれば偏向作用が強まるので、そのような効果がつくられます。

CHA, あるいはこれに類するセクタ電場をもちいたアナライザの設計においては、フリンジ場の影響まで含めて構造を決定するというよりも、フリンジ場の影響を打ち消して理想場の動作に近づけるという考えをすべきでしょう。しかしどちらにしろ、数値計算が必要であり、解析的な扱いだけでは不十分です。

## 9.7 ウィーンフィルタ

電場あるいは磁場の作用のもとで、電子軌道は局所的に決まった曲率を付与されます。すでに述べた MDA と CHA においては、そのような作用を引き続き受けることで、電子は円運動を行い、それに伴ってエネルギー分散作用が生じました。

電場と磁場をうまく重畳させ、両者による曲率が打ち消しあうようにすると、中心軌道が直線であるようなアナライザが実現されます。これが**ウィーンフィルタ** (Wien Filter : WF) です。この際には、中心軌道に沿って電場と磁場が直交するので、 $E \times B$  ( $E$  クロス  $B$ ) フィルタとよばれることもあります。

WF は、最初は特定のイオン種を取り出す目的でもちいられたので、アナライザではなくフィルタとよばれるのがふつうです。もちろん動作としては、ほかのアナライザと本質的に変わるところはありません。

WF においては、電場と磁場の作用が打ち消しあうことで、エネルギー分散も消えてしまいそうですが、しかしそうではありません。電場と磁場は分散作用に差があるので、完全に打ち消しあうことはなく、正味の分散が残ってくれます。

もともなる磁場と電場による電子軌道、そしてそれらを重畳させて中心軌道が直線に引き伸ばされた状態を Fig.20 に示します。この図は、MDA と CHA, そして WF の作用を一度に示したものです。WF に関しては、電場  $E$  が  $x$  方向、磁場  $B$  が紙面に垂直な  $y$  方向です。図においては、エネルギーと初期角度を共通にして計算しているので、アナライザによる分散作用の違い、そして開口収差の程度の差が見てとれます。

WF では、電場と磁場の分散が加算されるのではなく、打ち消された残りが利用されるだけです。その意味で損をすることになります。つまり、MDA や CHA よりも、分散係数の面では不利になります。開口収差に関しては、重畳の効果はそう単純ではありませんが、図を見ればわかるように、CHA と同程度の収差が残っています。

一回転すると分散と収差が消えるという MDA と CHA の特性は、そのまま WF にも引き継がれています。分散が最大となる位置で開口収差が最大となり、分散が消える位置で開口収差が消えるのも同じです。

光軸が直線であることが、WF の最大の特徴です。これによって装置全体が大きくなる場合もあり、光や高速荷電粒子が素通りして検出器に達してしまうこともあるので、よいことばかりではありません。電場と磁場が必要なので、装置として複雑になることも確かです。

光軸が直線であることで生じるメリットの一つは、調整が確実に行えるということです。つまり、最初に場を OFF にして、ビームが素通りする状態からはじめることができます。場を徐々に強くしていく過程で、フィルタの出口でのビームの状態をモニタしながら、軸合わせや場の強度の最適化を行うことが可能です。他のタイプのアナライザでは、いきなり強い場をかけなければビームが通りません。この WF のメリットは、とくにエネルギーを選んだ結像を行わせる際に重要になります。

WF は、光軸が直線であることから、電子光学にお

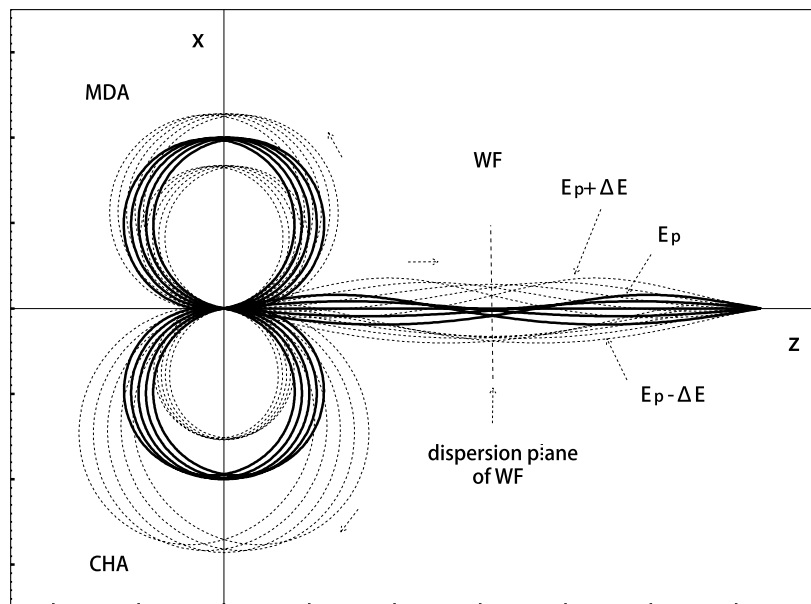


Fig. 20: Comparison of the energy dispersion and aperture aberration of the MDA, CHA and WF.

けるレンズ理論をそのまま適用できる唯一のアナライザとなります。多重極レンズ場を重畳させて収差を補正していく操作が可能であり、これにより、他のタイプのアナライザでは不可能な性能が実現されます。たとえば、開口収差は2次だけでなく3次も同時に補正可能であり、これはWFだけの特性です。WFの分散が小さいというデメリットは、これによって補われます。

WFは多くの場の自由度をもつので、WFの $C_E$ や $C_A$ がいくらであるかということはいえなくなります。Fig.20に示したのは、もっとも簡単な、一様電場と一様磁場からなる場合です。

WFの研究は、実用上だけでなく、アナライザというものの可能性を追求するために重要です。WFにたいしては、レンズとしてのあらゆる自由度を投入することが可能です。そこで、アナライザはどこまでの性能が可能かといったテーマが、WFをベースとすることで具体的な研究対象となりうるのです。WFの光学理論は、のちの章で詳しく述べる予定です。

## 9.8 アナライザの一般性質について

### 9.8.1 分散作用とレンズ作用の関係

前節までにおいて、アナライザの動作を種類別に見てきました。これらは、エネルギー分散作用とレン

ズ作用をあわせもつという点で共通しています。この二つの作用が共存したときに引き起こされる状況について、ここで一般的に考えてみましょう。

この問題を扱うには、一方的にビームを振り分けるだけのPMAやCMAよりも、周期的な動作を行うMDAとCHAを考察する方が適しています。周期性をもつアナライザにおいては、ビームが分散を受けたあとでも引き続き同じ場の作用を受け続けるので、一周期分のビームのふるまいにおいて、作用の本質が顕著に現れるからです。

MDAやCHAにおいて、電子が半回転した場所でエネルギー分散が最大となり、一回転後には分散が消えてしまう理由を考えてみましょう。分散作用があるのなら、回転を繰り返すごとに徐々に分散が大きくなっていきそうなものですが、そうはなっていません。もし回転ごとに分散が増えるのなら、それをうまく利用すれば高性能のアナライザが設計できそうです。なぜ分散は単調に増加していかないのでしょうか？

これは、アナライザがもつべきレンズ作用と関係しています。レンズの集束作用とは、電子が光軸から離れようとしたときに、光軸に引き戻そうとする作用です。アナライザの場合は、中心軌道が光軸に相当します。レンズがおよぼす力は光軸からの距離に比例します。すなわち、光軸からの距離が大きくなるほど、引き戻す力も大きくなります。

一方、アナライザとしての分散作用は、光軸と直



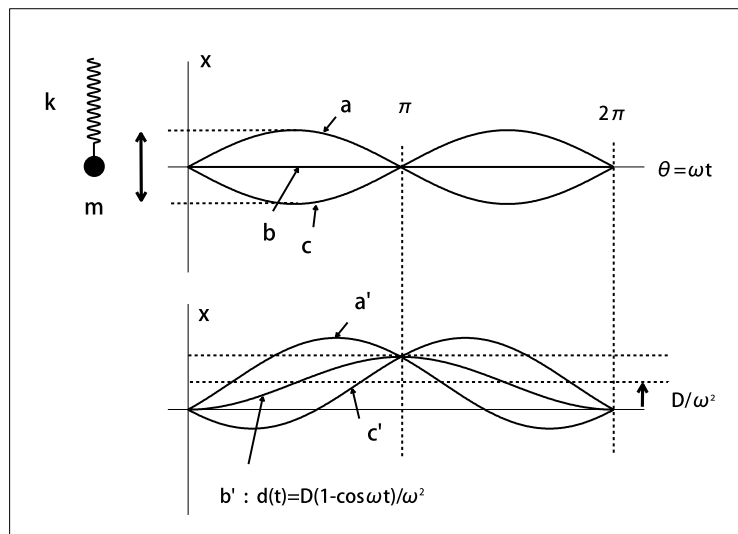


Fig. 21: A kinetic model for the explanation of the combined effect of energy dispersion and lens action in an energy analyzer.

交する方向にビームを押しやる作用です。この作用によってビームが一定方向にそれて行こうとしますが、レンズ作用がそれを引き戻します。分散作用は決まった方向に一定の力で押す作用であるのに対して、レンズ作用による力は光軸からの距離に比例するので、ビームが光軸から離れれば離れるほど引き戻す力も強くなり、いつかはビームの向きは反転して、光軸方向に戻ってきます。これによって、分散は単調に増加するのではなく、周期的なふるまいを示すことになります。

レンズ作用と分散作用が同時に存在する状況をもう少し定量的に調べるために、集束場と偏向場を重畳させた簡単なモデルをつくってみます。

まずレンズ作用を表現するために、Fig.21のように、バネにぶら下げた重りの振動を考えます。この振動は時間を独立変数として与えられますが、時間を光軸に沿った  $z$  座標に置きかえて考えれば、光軸からの距離に比例した力の場の中での電子軌道と同じ状況となります。

重りの質量を  $m$ 、バネのバネ定数を  $k$  とし、つりあいの位置を原点として上方向に  $x$  座標をとります。バネが重りにおぼす力は  $F = -kx$  ですから、重りの運動方程式は  $m\ddot{x} = -kx$ 、あるいは  $\omega = \sqrt{k/m}$  とおけば次式で与えられます。

$$\ddot{x} = -\omega^2 x \quad (69)$$

これは線形の微分方程式であり、独立変数を  $z$  にお

きかえて考えれば、レンズの1次軌道方程式に対応します。よってこのレンズは収差をもちません。

このように、調和振動子は収差のないレンズの動作を調べるための簡単なモデルとして有用です。アナライザの光軸は一般には曲線ですが、これを直線に引き伸ばして考えることとなります。

電子光学理論にまねて、二つの線形独立な基本解を構成しておきます。初期条件として  $(x(0), \dot{x}(0)) = (1, 0)$  をみたす解を  $g(t)$ 、 $(x(0), \dot{x}(0)) = (0, 1)$  をみたす解を  $h(t)$  とおけば、これらは次のようになります。

$$\begin{cases} g(t) = \cos \omega t \\ h(t) = \frac{1}{\omega} \sin \omega t \end{cases} \quad (70)$$

(69) の一般解は、これらの基本解の線形結合として与えられます。初期条件  $(x(0), \dot{x}(0)) = (x_0, v_0)$  のもとでの (69) の解は、

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 g(t) + v_0 h(t) \\ &= x_0 \cos \omega t + \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t \end{aligned} \quad (71)$$

となります。

Fig.21 の上の図は、 $v_0$  の三つの値にたいしての運動を示しています。これらは  $\theta = \omega t = \pi$  の面で一度同じ点に戻り、レンズの言葉でいうなら「集束」します。それ以後は、この周期運動を繰り返します。

さて、バネにぶら下がった重りにたいして、 $x$  の正方向に一定の力が付け加わったとします。たとえば、

重力が弱まったとすれば, そのような作用が加わったのと等価です. このとき, (69) は次のかたちに変更されます.

$$\ddot{x} = -\omega^2 x + D \quad (72)$$

上式の定数  $D$  が,  $x$  の正方向に押しやる作用を与えます. これは, パスエネルギーとは異なるエネルギーの電子にたいしての, アナライザの分散作用を表現するものです.

上式を解くのは簡単です. 右辺は  $-\omega^2(x - D/\omega^2)$  と変形できます. そこで  $y = x - D/\omega^2$  とおけば,  $y$  のしたがう方程式は  $\ddot{y} = -\omega^2 y$  となって (69) と同形です. よって, 一般解はやはり  $g(t)$  と  $h(t)$  の線形結合です. 変数を  $y$  から  $x$  にもどせば, (72) の一般解は,

$$x(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t + \frac{D}{\omega^2} \quad (73)$$

のかたちになります.

上式の右辺の最後の項は, 振動中心が  $x = 0$  から  $x = D/\omega^2$  にシフトしたことを示しています. すなわち,  $D$  の効果によって釣り合いの位置がずれたわけです. 振動中心はその位置にずれませんが, 単振動の振動数  $\omega$  は不変に保たれます.

さて, (73) の係数  $A, B$  を, 重りの初期条件によって表してみます. (71) のときと同じ  $(x(0), \dot{x}(0)) = (x_0, v_0)$  を要求してみましょう. この場合の  $A, B$  は (71) のときと同じにはならないことに注意が必要です. 一般解 (73) に初期条件を適用すれば  $A = x_0 - D/\omega^2$ ,  $B = v_0/\omega$  が得られ, したがって求める解は,

$$x(t) = x_0 \cos \omega t + \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t + \frac{D}{\omega^2} (1 - \cos \omega t) \quad (74)$$

となります.

この解の形を見ると,  $D$  のなす効果にたいして別の一面が見えてきます. すなわち,  $D = 0$  のときの運動 (71) と (74) を見比べれば,  $D$  の存在によって,

$$d(t) = \frac{D}{\omega^2} (1 - \cos \omega t) \quad (75)$$

という運動が加算されていることがわかります.

上式の  $d(t)$  は, (72) の解で,  $(x_0, v_0) = (0, 0)$  という初期条件をみたくもです.  $D$  がはたらく前の釣り合いの位置で重りをそとと離せば, 重りは新しい釣り合いの位置に行こうとして運動を始めますが, 重りの慣性によって行き過ぎてしまい, その2倍の距離を進んだ地点でやっと引き返して, 新しい釣り合いの点を通じたのちにもとの位置に戻ってきます.

この解の様子は, Fig.21 の下の図に示されています. 上の図の三つの運動に (75) が共通に加算されて,

全体として  $x$  の正方向に押しやられますが, バネの作用で途中から引き戻されるわけです.

上の計算は, CHA における軌道の解析の際に行ったものと, 本質的に同じです. CHA においては, 中心軌道にまわりの調和振動とはなりませんでしたが, 動径座標  $r$  の逆数  $u = 1/r$  を考えれば, 上で見た計算に完全に対応しています.

Fig.21 の状況は, 一般にアナライザの分散作用とレンズ作用が共存したときの, 軌道の様子を典型的に示すものです. 入射ビームは  $\theta = \pi$  の面でエネルギーに応じて振り分けられますが, エネルギーごとに一点に集束されます. もう半周期分進めば, 再度ビームは集束されますが, その間に分散した軌道は引き戻されて, 入射したときと完全に同じ条件に戻されます. (75) の運動に対応する軌道は**分散軌道** (Dispersion Trajectory) とよばれ, これによってアナライザの分散作用が表されます.

なお, 上記のモデルでは収差が存在しませんでした. もし収差が存在して, それが (MDA や CHA のように) 分散作用にもとづくものであれば, 分散が最大となる位置で収差も最大となり, 分散が消えれば収差も消えるわけです. したがって, たとえ開口収差が存在しても, 分散が消える位置では無収差結像が実現されます.

### 9.8.2 アナライザの色収差

分散作用とは, 電子のエネルギーの違いによって軌道が変化する現象です. アナライザがもつ分散作用をここまで見てきたわけですが, 電子レンズの色収差もまた, 同じ原因で生じるものです.

色収差という用語は, もともとは光学レンズに関してのもので, 可視光はある幅をもった波長の光の集合ですから, 波長ごとに屈折率の異なるレンズで写真を撮れば, 一本の線が虹のようにボケて写ります.

電子は目に見えませんが, 波長とエネルギーが対応するので, エネルギーが幅をもつことによるボケを色収差とよぶわけです. エネルギーのそろった電子ビームは, やはり光の場合をまねて, 単色ビームとよべれます.

アナライザはレンズとしてのほたらきを同時にもつので, 一般には色収差という概念を有することになります. しかし, 分散作用と色収差は良く似ているので, 「アナライザの色収差」を考えようとすると混乱してしまいがちです.

アナライザの分散作用と, 電子レンズの色収差の

違いを考えてみましょう。Fig.22のように、電子の初期条件を共通にして、レンズとアナライザを通る軌道を比べてみます。アナライザに関しては、ここでは代表としてMDAの軌道を描いています。

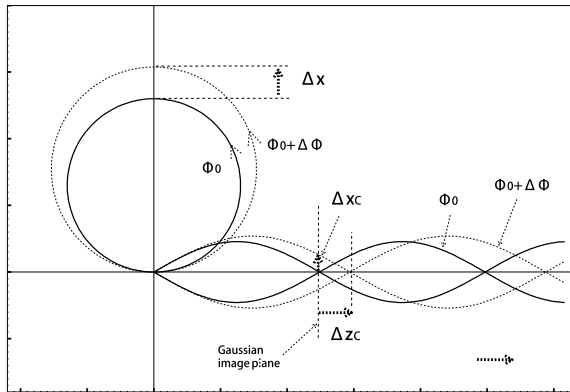


Fig. 22: Chromatic aberration of an electron lens and the energy dispersion of an analyzer.

電子レンズの色収差に関しては、本稿ではまだ正式な説明がなされていませんでしたので、ここでまず述べておくことにします。

通常の軸対称な電子レンズにおいては、電子のエネルギーが大きいほど、像面が物面から見て遠い側にずれます。レンズが静電型か磁場型かによらず、必ずこうなります。これは単に、電場や磁場中の電子軌道はエネルギーが大きいほど曲がりやすく、その逆はありえないということです。もちろん、アナライザの分散作用も、拠ってくる場所は同じです。

電子の加速電圧が  $\Phi_0$  のときの像面位置を基準にすると、加速電圧が  $\Delta\Phi$  だけ増加したときのフォーカス位置のずれ  $\Delta z$ 、および像面における軌道の高さのずれ  $\Delta x$  は、次式のかたちで与えられます。

$$\Delta z_c = C_c \frac{\Delta\Phi}{\Phi_0}, \quad \Delta x_c = C_c \frac{\Delta\Phi}{\Phi_0} \alpha_0 \quad (76)$$

上式における係数  $C_c$  が、レンズの色収差係数 (Chromatic Aberration Coefficient) です。軸対称レンズであれば、図に示した定義での  $C_c$  はかならず正です。色収差の存在によって、ビームが有限なエネルギー幅をもてば像がボケることとなります。色収差は結像レンズとしての空間分解能を左右する要因の一つです。

ビームを構成する電子がもつエネルギーはある分布をなしますが、加速電圧の代表値  $\Phi_0$  からのずれ  $\Delta\Phi$  の値を一つに固定して考えれば、そのときの軌道は

(1次理論の範囲で) ある決まった位置にフォーカスします。色収差とは、フォーカスのずれ、すなわちデフォーカスの効果です。ピントの合う位置がエネルギーごとに違うので、どこに像面を設定しても像はボケてしまうわけです。

(76)のかたちからわかるように、レンズの  $C_c$  はアナライザのエネルギー分散係数  $C_E$  と本質的に同じものです。  $C_E$  と同様、  $C_c$  の値はレンズ場のひろがりの程度でだいたい決まってしまう。加速電圧  $\Phi_0$  を大きくすれば  $\Delta\Phi$  の影響が低減されるので、電子顕微鏡では高加速ほど空間分解能の面で有利になります。(電子の波長が短くなるというのも、高加速で分解能が良くなる要因です。)

レンズの色収差は、場の中を進むにつれて単調に増加します。すなわち、どんどん累積していき、途中で減少に転ずることはありません。(静電レンズの場を局所的に見るなら色収差の符号が反転することがありえますが、像面ごとに考えればかならず増加です。)

一方、Fig.22におけるアナライザの側の軌道においては、エネルギー分散は軌道の半回転の位置で最大となり、一回転すると分散は消えてしまいます。前節における解析からすれば、これはアナライザが同時にもつレンズ作用に起因するわけです。この違い、すなわちアナライザの分散は周期的であり、レンズの色収差は累積されるということが本質的な相違点です。

さて、アナライザは一般にレンズ作用を併せもつものですから、分散作用とはべつに、レンズとしての色収差をもつはず。これを考えるためには、やはりアナライザの中心軌道を直線に引き伸ばして考える方がわかりやすいでしょう。アナライザのレンズ作用が色収差を有する場合の軌道の様子を描いたのがFig.23です。(この図は、WFの場のパラメタを調整して、開口収差を小さくすることで色収差の作用を誇張したものです。)

アナライザは分散作用によって、エネルギーの値によって軌道を分離します。加速電圧  $\Phi = \Phi_0 + \Delta\Phi$  をもつ電子の軌道に注目すると、このビームを集束させるレンズ作用が色収差をもてば、中心軌道をなす加速電圧  $\Phi_0$  のビームよりも遠い側にフォーカス点が移動するでしょう。加速電圧  $\Phi_0 - \Delta\Phi$  のビームにたいしては、その逆に、より手前でフォーカスするはず。この効果によって、分散面にフォーカスが合う面は図のように傾きます。これが、アナライザにおける色収差の作用です。

この効果は、すでにCMAにおける軌道計算で見た

ものです (Fig.9) . ただし, CMA においては通常は分散像を検出することは行われず, 収集されるスペクトルにおいてこの収差の影響は顕著には現れません. WF では, 多重極場をうまく重畳すればこの収差は消去できます.

なお, 収差を考慮しないときの狭義の分散面と区別して, 色収差によって傾いた分散像のフォーカス面をスペクトル面ということがあります. 狭義の分散面においては, 一般に分散像は開口収差と色収差によってボケますが, 観察面を傾けることで色収差の寄与は除けるわけです.

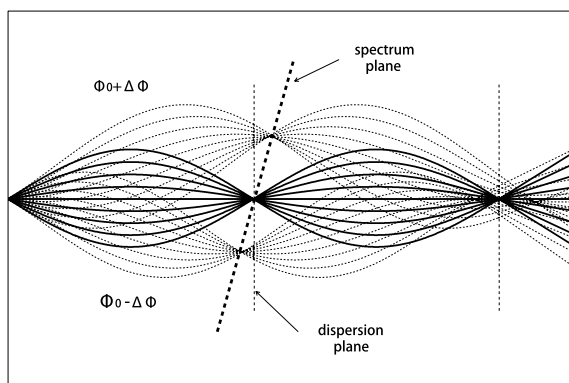


Fig. 23: Combined action of the energy dispersion and chromatic aberration of an analyzer results in a tilt of a spectrum plane.

さて, レンズの色収差は場を進むにつれて累積するのです. もしエネルギー分散面で色収差が存在するならば, もう半回転分進んだ位置ではさらに色収差の影響が大きくなっているはずですが. そして, その場所では分散作用は消えてしまうわけですから, 色収差の影響だけがそのまま見える状態となります. この様子も Fig.23 から見てとれます.

MDA と CHA は, エネルギーが異なっても一回転後に厳密に一点に戻るのですから, これらはどの位置でも色収差をもたないことがわかります. (なぜなら, もし MDA と CHA のレンズ作用が色収差をもつなら, それは単調に累積されるからです. 一回転後でもその効果が見えるはずですが.) よって, これらのアナライザでは分散面が斜めに傾くという効果は生じません. これは, すでに軌道計算の結果によって見たとおりです.

最後に, 電場と磁場の分散作用の違いについてふれておきます. すでに個別のアナライザの節で示したように, MDA の分散係数  $C_E$  は中心軌道半径  $r_0$  に等

しく, 同じ軌道半径の CHA の  $C_E$  は  $2r_0$  です. MDA と CHA では, ともに中心軌道にたいしては軌道に直交する方向に力がかかるので, 分散係数の違いはそのまま磁場と電場の性質の違いと考えてよいでしょう. すなわち, 磁場より電場のほうが 2 倍分散が大きいということです.

これは言い換えれば, 電子のエネルギー変化にたいして, 磁場より電場の方が軌道の変化が大きいということです. アナライザとして, 分散が大きい方が望ましいことに間違いはありません. しかしレンズとして考えると, 分散が大きいということは, 色収差が大きいことを意味します. よって, 逆に不利な性質となってしまいます. 静電レンズのほうが磁場型レンズよりも色収差が大きいとは限りませんが, そのような傾向は一般的に見られます.

## 9.9 まとめ

本章では, エネルギーアナライザの基本的な動作を説明し, 各種アナライザの特性を述べました. 要点をまとめれば次のようです.

- (1) アナライザのエネルギー分散の大きさ  $\Delta E$  は, パスエネルギー  $F_p$  にたいしてのエネルギー差の相対値,  $\Delta E/E_p$  に比例する. この比例定数がアナライザのエネルギー分散係数  $C_E$  として定義される.
- (2) アナライザは, 有限の角度幅をもった入射ビームを集束させるために, レンズ作用をあわせもつ必要がある. このレンズ作用がもつ収差は開口収差とよばれ, 大きさは開口収差係数  $C_A$  で与えられる.
- (3) 分散像が分離するような  $\Delta E$ , すなわち絶対分解能は  $F_p$  に比例して劣化していく. このため, 相対分解能  $\Delta E/E_p$  は  $E_p$  によらない定数となる.
- (4) 点光源にたいしての相対分解能は, 比率  $C_A/C_E$  で決定される. この値はアナライザの種類だけで決まり, アナライザのサイズとは無関係である.
- (5) 一様電場をもちいた PMA では, 開口収差は 2 次からはじまり, したがって 1 次集束である. 円筒対称場をもちいる CMA においては, 2 次の開口収差が消える条件が存在し, 2 次集束が実現される. 感度が同じ条件で比較すると, CMA のエネルギー分解能は PMA にたいして一桁向上する.
- (6) 中心軌道が円となるアナライザとして, 一様磁場をもちいた MDA と, 球対称電場をもちいた CHA がある. ともにレンズ作用は 1 次集束である. 電場は磁場より 2 倍分散が大きいことから, CHA は MDA

より  $C_E$  が2倍大きい。

(7) MDA と CHA の開口収差は、分散作用に由来するものであり、 $C_A/C_E$  は両者で共通となる。したがって、分解能の面で MDA と CHA は同等である。分散が消える位置では開口収差も 0 となるため、無収差結像の状況が実現される。

(8) MDA の磁場と CHA の電場を重畳させて、光軸を直線に引き伸ばしたものが WF である。アナライザとしての動作は、MDA と CHA の特徴がそのまま引き継がれる。光軸が直線であることでレンズ理論の適用が可能となり、これによって場の最適化が行われる。

(9) 分散作用とレンズ作用が共存する系においては、分散作用によって一方向に振られたビームは、レンズ作用によって中心軌道に引き戻される。そのため、分散軌道は中心軌道のまわりを振動するふるまいを示す。

(10) アナライザがもつレンズ作用は色収差をともない、これによって分散像のフォーカス面が傾く効果が生じる。アナライザの分散作用と開口収差が周期的な変動を示すのにたいして、色収差は単純に累積される。

## 9.10 文献紹介

各種アナライザの実用面での比較、および CMA の詳細に関しては、本誌の後藤先生の解説を参照してください。

電子分光用のアナライザのレビューとしては、たとえば次のものがあります。

[1] B. Wannberg, U. Gelius and K. Siegbahn, J. Phys. E, **7**, 149(1974)

[2] D. Roy and D. Tremblay, Rep. Prog. Phys., **53**, 1621(1990)

逆自乗法則にしたがう力の場のもとでの質点の運動に関しては、次を参照しました。

[3] 野間進 他訳, ゴールドスタイン, 古典力学, 吉岡書店(1959); H.Goldstain, Classical Mechanics, 2nd edition, Addison Wesley(1981)